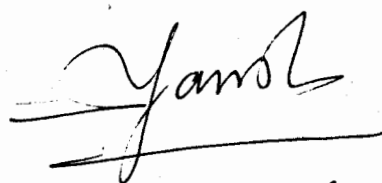


CHU QUỐC THẮNG

PHƯƠNG PHÁP PHÂN TỬ HỮU HẠN

(DÙNG CHO CAO HỌC ĐẠI HỌC KỸ THUẬT)



Phạm Tuấn Đạt

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

1997

Chương I

Bổ túc về cơ học vật rắn và các phương pháp tính trong cơ học

§1.1. CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

1. Các phương trình cân bằng: (Equation of internal equilibrium)

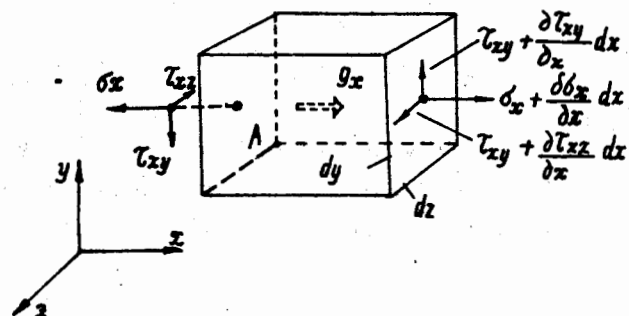
Dưới tác dụng của tải trọng ngoài, vật thể chịu lực (có thể tích V , bề mặt S và những liên kết cần thiết nào đó để bảo đảm khả năng chịu lực mà không bị biến hình) bị biến dạng và bên trong nó sẽ xuất hiện ứng suất.

Ứng suất tại các điểm khác nhau là khác nhau và được xác định bởi *trạng thái ứng suất* tại điểm đó. Như đã biết trong sức bền vật liệu, trạng thái ứng suất tại một điểm là tập hợp của tất cả các giá trị ứng suất tác dụng trên các mặt cắt qua điểm khảo sát. Và trạng thái ứng suất tại một điểm hoàn toàn xác định khi biết các ứng suất trên 3 mặt vuông góc nhau tại điểm đó. Hay cụ thể hơn, với một hệ tọa độ vuông góc thông thường xyz , thì trạng thái ứng suất tại một điểm hoàn toàn xác định khi biết tập hợp 9 thành phần ứng suất tác động trên 3 mặt phẳng vuông góc nhau và song song với các mặt phẳng tọa độ:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}. \quad (1.1)$$

Nếu tách ra từ vật thể một phân tố vật thể thì rõ ràng phân tố này phải ở trạng thái cân bằng bởi các nội lực (ứng suất) và ngoại lực (lực khối) tác dụng lên nó. (Xem hình 1.1 với *chú ý rằng* để đơn giản chỉ vẽ các thành phần ứng suất tác dụng trên 2 mặt phẳng // mặt phẳng yz và lực khối chỉ vẽ thành phần g_x song song trục x).

Bằng cách sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học thông thường, bỏ qua các vô cùng bé bậc cao, cuối cùng ta có:



Hình 1.1

Từ 3 phương trình tổng momen với 3 trục tọa độ x, y, z ta có các biểu thức của định luật đối ứng của ứng suất tiếp. Cụ thể là:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zy} = \tau_{yz}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (1.2)$$

Các biểu thức này chỉ ra rằng: Trạng thái ứng suất tại một điểm có thể hoàn toàn xác định thay vì 9 mà bằng 6 thành phần ứng suất sau đây và tập hợp của chúng là vectơ ứng suất $\{\sigma\}$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \quad (1.3)$$

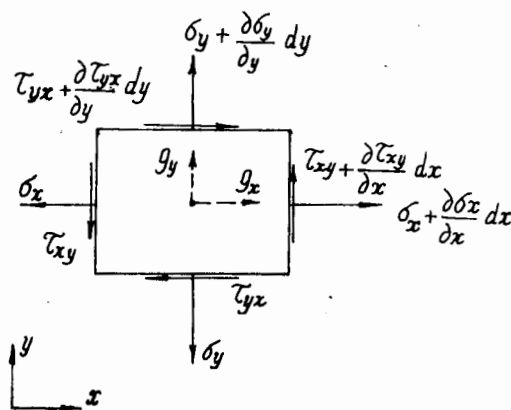
Còn từ 3 phương trình hình chiếu theo 3 trục x, y, z sẽ cho 3 phương trình cân bằng sau:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

trong đó: g_x, g_y, g_z là các lực khối thành phần, hay cụ thể hơn là các lực khối trên 1 đơn vị thể tích tác dụng dọc theo các phương x, y, z . Lực khối có thứ nguyên $[Lực/(chiều dài)^3]$ là 3 thành phần của vectơ lực khối $\{g\}$.

Các phương trình (1.4) được gọi là phương trình vi phân cân bằng, hay phương trình cân bằng nội.

Trong bài toán 2 chiều (2-D): Các ứng suất chỉ là hàm số 2 biến số, ví dụ x, y . Trạng thái ứng suất tại một điểm lúc đó chỉ cần biểu diễn bởi ba thành phần ứng suất σ_x, σ_y và τ_{xy} . (hình 1.2)



Hình 1.2

Lúc đó các phương trình cân bằng nội chỉ còn hai phương trình sau:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + g_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + g_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

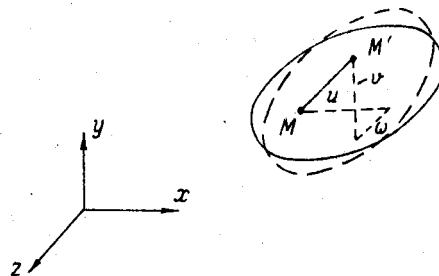
Trong bài toán 1 chiều (1-D): Trạng thái ứng suất tại một điểm bất kỳ được đặc trưng bởi một thành phần ứng suất và là hàm của một biến số (ví dụ tọa độ x). Phương trình cân bằng chỉ còn là:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + g_x = 0 \quad (1.6)$$

2. Quan hệ giữa biến dạng – chuyển vị:

Dưới tác dụng của tải trọng, vật thể chịu lực bị biến dạng, các điểm trong vật thể chuyển dịch đến vị trí mới trong không gian. Ta nói rằng các điểm có chuyển vị.

Xét điểm M bất kỳ có tọa độ (x, y, z) . Do biến dạng, điểm M chuyển tới vị trí M' (hình 1.3).



Hình 1.3

Ta gọi $\overline{MM'}$: là chuyển vị toàn phần của điểm M.

Hình chiếu của chuyển vị toàn phần $\overline{MM'}$ lên 3 trục tọa độ là u, v, w là các chuyển vị thành phần. Và chúng là hàm số của tọa độ điểm.

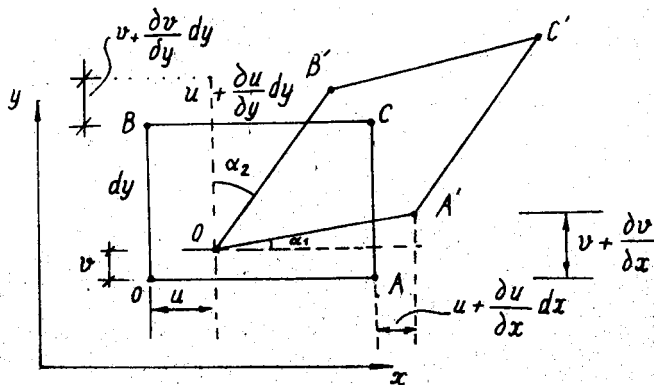
Do vật thể bị biến dạng, các điểm có chuyển vị nên một đoạn thẳng nhỏ vô cùng có phương nào đó đi qua điểm khảo sát cũng sẽ bị biến dạng co ngắn hoặc dãn dài ra, cũng như vậy các góc vuông tạo bởi hai đoạn thẳng thẳng góc nhau tại điểm khảo sát cũng sẽ không còn vuông nữa. Ta nói rằng tại điểm khảo sát có biến dạng dài và biến dạng góc. Nói chung, theo các phương khác nhau thì có biến dạng dài khác nhau và biến dạng góc của góc vuông hợp bởi hai phương bất kỳ thẳng góc nhau cũng khác nhau. Và cũng như TTUS, tập hợp của các biến dạng dài và góc theo các phương bất kỳ qua một điểm được gọi là trạng thái biến dạng. Và cũng có thể thấy, tương tự như TTUS, TTBD tại một điểm xác định bằng 6 thành phần biến dạng hay vectơ biến dạng $\{\epsilon\}$ và:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \quad (1.7)$$

gồm ba biến dạng dài theo ba phương trục tọa độ x, y, z và ba biến dạng góc trong ba mặt phẳng song song các mặt phẳng tọa độ.

Giữa các thành phần biến dạng và các thành phần chuyển vị có mối quan hệ với nhau. Để đơn giản ta xét bài toán phẳng (điều này không làm mất tính tổng quát của vấn đề). Xem hình 1.4

Xét phân tử chữ nhật OABC có các cạnh dx, dy song song các trục tọa độ.



Hình 1.4

Khi vật thể bị biến dạng, phần tử OABC cũng bị biến dạng, các điểm chuyển tới vị trí mới trong mặt phẳng và O'A'B'C'.

Phân tử OABC bị biến dạng:

Cụ thể là các cạnh phân tử bị biến dạng dài ra hoặc co ngắn lại, góc vuông OAB không còn vuông nữa.

Rõ hơn: cạnh phân tử bị biến dạng dài tương đối theo x, y .

$$\epsilon_x = \frac{\text{Độ biến đổi chiều dài OA theo phương x}}{\text{Chiều dài ban đầu của OA}} = \frac{\left[dx + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u \right] - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{Tương tự: } \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Độ giảm góc vuông được gọi là biến dạng góc trong mặt phẳng xy, kí hiệu γ_{xy} .

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2 \approx \text{tg}\alpha_1 + \text{tg}\alpha_2 &= \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - v}{\left[dx + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u \right]} + \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) - u}{\left[dy + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) - v \right]} \\ &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{(1 + \epsilon_x) dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{(1 + \epsilon_y) dy} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \epsilon_x \text{ và } \epsilon_y \ll 1 \Rightarrow \text{bỏ qua} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Vậy có thể nói rằng:

Biến dạng dài tương đối theo một phương bất kỳ là bằng đạo hàm riêng của thành phần chuyển vị theo phương đó lấy đối với biến số cũng theo phương đó.

Biến dạng góc trong một mặt phẳng nào đó là bằng tổng đạo hàm riêng của các chuyển vị thành phần trong mặt phẳng này lấy theo các biến số của hướng thẳng góc với các chuyển vị thành phần.

Tổng quát, trong bài toán 3 chiều, ta có liên hệ giữa các biến dạng dài, và biến dạng góc đối với các chuyển vị thành phần như sau: (Các phương trình Cauchy).

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\text{Hay ở dạng ma trận: } \{\epsilon\} = [\partial]\{u\} \quad (1.9)$$

Hay cụ thể hơn:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

3. Các phương trình liên tục của biến dạng.

Các phương trình Cauchy (1.8) cho ta sự liên hệ 6 thành phần biến dạng với 3 thành phần chuyển vị. Vậy nếu biết 3 chuyển vị thì bằng cách đạo hàm ta sẽ được 6 thành phần biến dạng một cách duy nhất. Nhưng ngược lại: nếu biết 6 biến dạng thì để tìm 3 thành phần chuyển vị thì thông thường bằng cách tích phân 6 biến dạng thành phần theo các đạo hàm riêng. Như vậy sự chọn tùy ý 6 biến dạng là không được vì chúng sẽ không cho duy nhất 3 chuyển vị. Do vậy rõ ràng 6 biến dạng là không độc lập nhau và giữa chúng phải tồn tại sự liên hệ xác định nào đó. Đó chính là các phương trình liên tục. Ý nghĩa hình học là bảo đảm cho vật thể biến dạng không có vết gãy đứt.

Thật vậy, thử loại các chuyển vị trong (1.8).

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 + \quad \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \hline
 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

Đây là liên hệ giữa các thành phần biến dạng dài và góc trong cùng một mặt phẳng.

Trong hệ cũng thiết lập được mối liên hệ giữa các biến dạng góc trong 3 mặt phẳng thẳng góc nhau với biến dạng dài. Tóm lại, ta có 6 phương trình liên tục:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\
 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

Trong bài toán 2-D: Các phương trình (1.10) chỉ còn lại phương trình quan trọng nhất:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

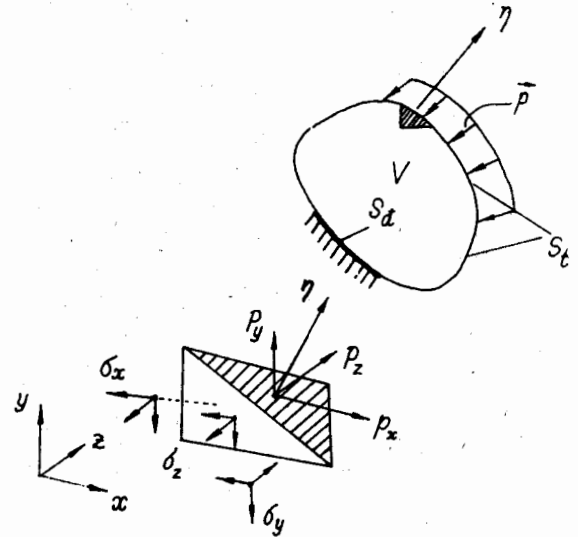
Trong bài toán 1-D: Các phương trình trên tự động thỏa mãn.

4. Điều kiện biên (Boundary conditions)

Các điều kiện biên có thể về chuyển vị hoặc ứng suất. Điều kiện biên liên quan đến chuyển vị (Điều kiện động học) thường là đòi hỏi về chuyển vị tại một điểm (hoặc một phần mặt biên) nào đó có một giá trị cho trước nào đó.

Điều kiện biên liên quan đến ứng suất (điều kiện biên tĩnh học) thì thể hiện sự cân bằng tĩnh học đòi hỏi giữa ngoại lực đặt lên biên và ứng suất ngay sát mặt biên (còn gọi là điều kiện bề mặt).

Ví dụ: Vật thể chịu lực có thể tích V , bề mặt S , vật thể liên kết chặt trên S_d và trên phần còn lại S_t có một phần chịu tải trọng p . (chú ý: $S = S_d + S_t$), hình 1.5.



Hình 1.5

Vậy: Điều kiện biên động học: $u = v = w = 0$ trên S_d

Điều kiện biên tĩnh học: Trên S_p có chịu $\{p\}$ tải trọng.

Trên $(S_t - S_p)$ không có tải trọng hay $\{p\} = 0$

Thông thường tải trọng ngoài (tải trọng bề mặt) cho bởi vectơ $\{p\} = \{p_x, p_y, p_z\}^T$ là gồm 3 thành phần hình chiếu lên 3 trục x, y, z .

Bằng cách khảo sát sự cân bằng của một phần tử tứ diện vô cùng nhỏ ngay sát biên mà mặt đáy chính là mặt biên thì ta có liên hệ giữa ứng suất (nội lực) và ngoại lực như sau:

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = p_x \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = p_y \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = p_z \end{cases} \quad (1.11)$$

trong đó (l, m, n) là cosin chỉ phương của pháp tuyến ngoài η của mặt bên tại điểm khảo sát.

Phương trình (1.11) được gọi là điều kiện bề mặt. Nó cho ta mối quan hệ giữa tải trọng ngoài và nội lực. Và nó cũng là điều kiện biên tĩnh học.

Ví dụ: Xét một bản phẳng ngâm một đầu-trái như hình 1.6, ta có các điều kiện biên sau:

biên động học:

Cạnh AB: các điểm không có chuyển vị u và v : hay $u = 0, v = 0$.
Mà phương trình cạnh AB trong hệ tọa độ như hình vẽ là: $x = 0$. Vậy điều kiện biên động học có thể là:

$$u(0, y) = v(0, y) = 0.$$

Ngoài ra còn có cả điều kiện biên thể hiện góc xoay bằng không.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

Điều kiện biên tĩnh học trên phần biên còn lại:

Trên cạnh AD ($y = 0$) và trên cạnh CD ($x = l$) tải trọng không có: $p_x = p_y = 0$. Cụ thể trên cạnh AD ($y = 0$) có pháp tuyến ngoài $\eta_1(0, -1)$, vậy áp dụng (1.11) với bài toán phẳng ta có:

$$\begin{cases} 0 \cdot (\sigma_x)_{AD} - 1 \cdot (\tau_{xy})_{AD} = 0 \\ 0 \cdot (\tau_{xy})_{AD} - 1 \cdot (\sigma_y)_{AD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\tau_{xy})_{AD} \equiv (\tau_{xy})_{y=0} = 0 \\ (\sigma_y)_{AD} \equiv (\sigma_y)_{y=0} = 0 \end{cases}$$

Tương tự, trên cạnh CD ($x = l$) có $\eta_2(l, 0)$ ta cũng có: $(\sigma_x)_{x=l} = (\tau_{xy})_{x=l} = 0$

Còn trên BC ($y = h$): có $\eta_3(0, 1)$, chịu tải trọng $p_y = -q$, sử dụng (1.11) ta có:

$$(\tau_{xy})_{BC} \equiv (\tau_{xy})_{y=h} = 0 ; (\sigma_y)_{BC} \equiv (\sigma_y)_{y=h} = -q$$

5. Các phương trình vật lý- Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng- Định luật Hooke

Như vậy ở các mục trên ta đã làm quen với hai yếu tố tĩnh học và động học độc lập nhau trong bài toán cơ. Hai yếu tố này được liên hệ với nhau bởi các định luật ứng xử thể hiện mối liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Và rõ ràng mối quan hệ này của các vật liệu khác nhau thì là khác nhau và chỉ có thể từ thực nghiệm mới xác định được.

Để đơn giản giáo trình này chỉ xét giai đoạn làm việc đàn hồi của vật liệu và xem sự đàn hồi này là tuyến tính, tức quan hệ giữa ứng suất và biến dạng là tuyến tính. Khi đó, quan hệ này được cho bởi định luật Hooke, đã quen thuộc trong giáo trình Sức bền vật liệu.

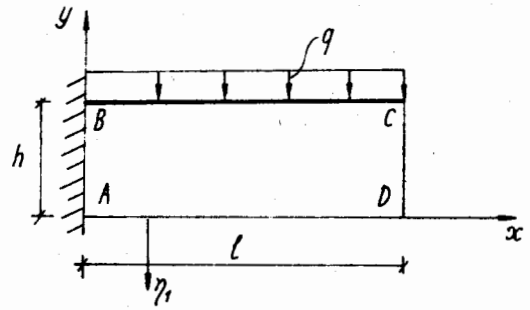
Trong bài toán ba chiều với vật liệu đẳng hướng định luật Hooke là:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} \end{aligned}$$

Hay ở dạng ma trận; và kể thêm thành phần biến dạng ban đầu.

$$\{\epsilon\} = [C]\{\sigma\} + \{\epsilon_0\} :$$

(1.12)



Hình 1.6

Trong đó:

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$ là vectơ biến dạng

$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$: vectơ ứng suất

$\{\varepsilon_0\} = \{\varepsilon_{ox}, \varepsilon_{oy}, \varepsilon_{oz}, \gamma_{oxy}, \gamma_{oyz}, \gamma_{ozx}\}^T$ là vectơ biến dạng ban đầu.

[C] : ma trận các hệ số đàn hồi.

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

với E - modun đàn hồi Young của vật liệu. G là modun đàn hồi trượt

ν - hệ số Poisson của vật liệu.

Chú ý rằng việc xác định ν bằng thực nghiệm khó hơn việc xác định modun trượt G từ thí nghiệm xoắn. Nên thường tìm G từ thí nghiệm xoắn thành tròn trước rồi mới xác định ν từ quan hệ sau đây:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.14)$$

Với $\{\varepsilon_0\}$ là vectơ biến dạng ban đầu. Trường hợp do nhiệt độ thì:

$$\{\varepsilon_0\} = \alpha T \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T \quad (1.15)$$

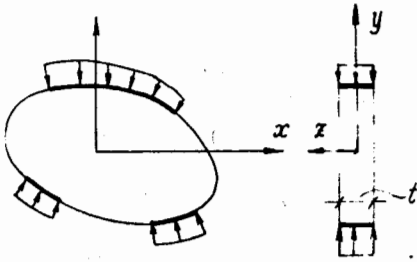
trong đó α là hệ số giãn nở vì nhiệt của vật liệu, còn T là độ biến thiên của nhiệt độ.

Đôi khi ta cũng cần đến các biểu thức biểu diễn ứng suất theo biến dạng, bằng cách nghịch đảo (1.12)' ta có: $\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\})$

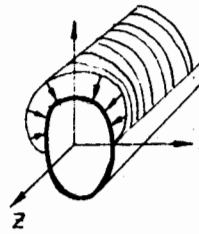
$$\text{hay } \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

trong đó ma trận hệ số [D] là:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$



Hình 1.7



Hình 1.8

Bài toán 2 chiều – Bài toán phẳng: Trong một số bài toán cụ thể dưới đây khi các đại lượng chính của bài toán chỉ là hàm số của 2 tọa độ điểm (thường lấy là tọa độ x, y) thì ta có bài toán 2 chiều. Trong lý thuyết đàn hồi thường gặp hai dạng bài toán 2 chiều sau:

(a) *Bài toán ứng suất phẳng:* Khi vật thể có dạng tấm và tải trọng nằm trong mặt phẳng giữa tấm, phân bố đều theo bề dày tấm thì có thể xem rằng (Hình 1.7):

$$+ \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \text{ (chọn trục } z \text{ vuông góc mặt phẳng tấm)}$$

+ Các ứng suất không đổi theo bề dày tấm (tức là theo hướng z) hay ứng suất không phụ thuộc tọa độ z. (Dù rằng điều này sẽ vi phạm một vài điều kiện của tính liên tục nhưng chúng đủ chính xác đối với tất cả các bài toán thực tiễn khi tấm là mỏng)

Khi đó định luật Hooke sẽ là:

$$\{\epsilon\} = [C]\{\sigma\} + \{\epsilon_0\}$$

trong đó:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \epsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} = \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{và } [C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$\text{Hay ở dạng ngược: } \{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) = [D]\{\epsilon\} - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{với } [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

Biến dạng theo phương z là tồn tại và là:

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha T$$

(b) *Bài toán biến dạng phẳng:* Khi vật thể có dạng lăng trụ dài và có mặt cắt ngang là không đổi suốt chiều dài (hình 1.8), chịu tải trọng đều và vuông góc trục

z dọc theo chiều dài, thì có thể dễ thấy rằng: tại mọi điểm ta có:

$$w = 0 \text{ và } \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Các đại lượng ứng suất biến dạng và chuyển vị chỉ phụ thuộc 2 biến x, y.

Và từ $\varepsilon_z = 0$ ta dễ thấy các công thức của định luật Hooke là:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} + \{\varepsilon_0\}$$

trong đó, $[C] = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\{\varepsilon_0\} = (1+\nu)\alpha T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Hoặc ở dạng ngược. $\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) = [D]\{\varepsilon\} - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\text{với } [D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

và $\sigma_z \neq 0$, cụ thể: $\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) - E\alpha T$

còn $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

• **Bài toán 1 chiều** : Do chỉ tồn tại một thành phần ứng suất, định luật Hooke là:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x + \alpha T$$

Hoặc: $\sigma_x = E\varepsilon_x - E\alpha T$ (ở đây $[D] = E$)
(1x1)

• **Quan hệ ứng suất - biến dạng của vật liệu không đẳng hướng.**

Trong thực tế kỹ thuật ngoài các loại vật liệu đẳng hướng (isotropic) người ta còn sử dụng các loại vật liệu không đẳng hướng (anisotropic) như bê tông cốt thép, gỗ, các loại vật liệu composit, ... Khi đó khác với vật liệu đẳng hướng, các tính chất của vật liệu không đẳng hướng tại một điểm theo các phương khác nhau là khác nhau. Định luật Hooke tổng quát mô tả quan hệ tuyến tính giữa biến dạng và ứng suất có dạng:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{26} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ C_{61} & C_{62} & \dots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix}$$

Hay $\{\epsilon\} = [C]\{\sigma\}$

Trong đó ma trận các hệ số đàn hồi $[C]$ là đối xứng và có 21 hằng số độc lập. Các chỉ số 1, 2 và 3 được dùng thay thế tương ứng các chỉ số x, y và z.

Với vật liệu trục hướng (orthotropic), số hằng số độc lập của ma trận $[C]$ rút xuống còn 9 và ma trận $[C]$ có dạng:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

trong đó các phần tử C_{ij} là:

$$C_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad C_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}, \quad C_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_3}$$

$$C_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad C_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad C_{33} = \frac{1}{E_3}$$

$$C_{44} = \frac{1}{G_{12}}, \quad C_{55} = \frac{1}{G_{23}}, \quad C_{66} = \frac{1}{G_{31}}$$

Với E_1, E_2, E_3 là môđun đàn hồi Young trong các mặt phẳng được xác định tương ứng bởi các trục 1, 2 hay 3 (hoặc x, y, z).

G_{12}, G_{23} và G_{31} là các môđun đàn hồi trượt trong các mặt phẳng 12, 23 và 31. Còn ν_{12}, ν_{23} và ν_{31} là các hệ số Poisson.

9 thành phần độc lập này là cần thiết để mô tả một vật liệu trục hướng trong trạng thái ứng suất phức tạp, ba chiều.

Trong trạng thái ứng suất phẳng, $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$ nên phương trình định luật Hooke ở trên có dạng:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

trong đó, 4 thành phần độc lập của ma trận $[C]$ là:

$$C_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad C_{22} = \frac{1}{E_2}$$

$$C_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}$$

Hay $\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}$

Trong đó ma trận các hệ số đàn hồi $[C]$ là đối xứng và có 21 hằng số độc lập. Các chỉ số 1, 2 và 3 được dùng thay thế tương ứng các chỉ số x, y và z.

Với vật liệu trục hướng (orthotropic), số hằng số độc lập của ma trận $[C]$ rút xuống còn 9 và ma trận $[C]$ có dạng:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

trong đó các phần tử C_{ij} là:

$$C_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad C_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}, \quad C_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_3}$$

$$C_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad C_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad C_{33} = \frac{1}{E_3}$$

$$C_{44} = \frac{1}{G_{12}}, \quad C_{55} = \frac{1}{G_{23}}, \quad C_{66} = \frac{1}{G_{31}}$$

Với E_1, E_2, E_3 là môđun đàn hồi Young trong các mặt phẳng được xác định tương ứng bởi các trục 1, 2 hay 3 (hoặc x, y, z).

G_{12}, G_{23} và G_{31} là các môđun đàn hồi trượt trong các mặt phẳng 12, 23 và 31. Còn ν_{12}, ν_{23} và ν_{31} là các hệ số Poisson.

9 thành phần độc lập này là cần thiết để mô tả một vật liệu trục hướng trong trạng thái ứng suất phức tạp, ba chiều.

Trong trạng thái ứng suất phẳng, $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$ nên phương trình định luật Hooke ở trên có dạng:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

trong đó, 4 thành phần độc lập của ma trận $[C]$ là:

$$C_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad C_{22} = \frac{1}{E_2}$$

$$C_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}$$

$$C_{44} = \frac{1}{G_{12}}$$

Ở dạng ngược, các phương trình định luật Hooke biểu diễn ứng suất qua biến dạng trong trường hợp bài toán ứng suất phẳng là: $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$

$$\text{Hay} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

trong đó:

$$D_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad D_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}$$

$$D_{12} = \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}$$

$$D_{44} = 2G_{12}$$

6. Đặt bài toán.

Như vậy khi nghiên cứu một vật thể biến dạng có thể tích V biến dạng dưới tác dụng của lực khối $\{g\}$ trên thể tích V và lực mặt $\{p\}$ trên phần mặt biên S_t , cũng như các điều kiện biên động học trên phần biên S_d , ta thấy rằng tại mỗi điểm sẽ xuất hiện ứng suất $\{\sigma\}$, biến dạng $\{\epsilon\}$ và các điểm có chuyển vị $\{u\}$. Với mục tiêu của việc nghiên cứu là tìm được sự phân bố ứng suất, biến dạng và chuyển vị này sinh trong vật thể, có thể tóm tắt các ẩn hàm cần tìm trong bảng sau tùy thuộc bài toán là 3, 2 hay 1 chiều.

Đại lượng cần tìm	Bài toán 3- D	Bài toán 2 - D	Bài toán 1 - D
Chuyển vị $\{u\}$	u, v, w	u, v	u
Ứng suất $\{\sigma\}$	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	σ_x
Biến dạng $\{\epsilon\}$	$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$	ϵ_x
Tổng số ẩn hàm	15	8	3

Các đại lượng cần tìm này về nguyên tắc "có thể" có được ở dạng giải tích bằng cách "tích phân trực tiếp" các phương trình cơ bản sau.

Loại phương trình	Số phương trình		
	Bài toán 3 - D	Bài toán 2 - D	Bài toán 1 - D
Các phương trình cân bằng (nội)	3	2	1
Các phương trình biến dạng - chuyển vị	6	3	1
Các phương trình ứng suất - biến dạng (Hooke)	6	3	1
Tổng số phương trình	15	8	3

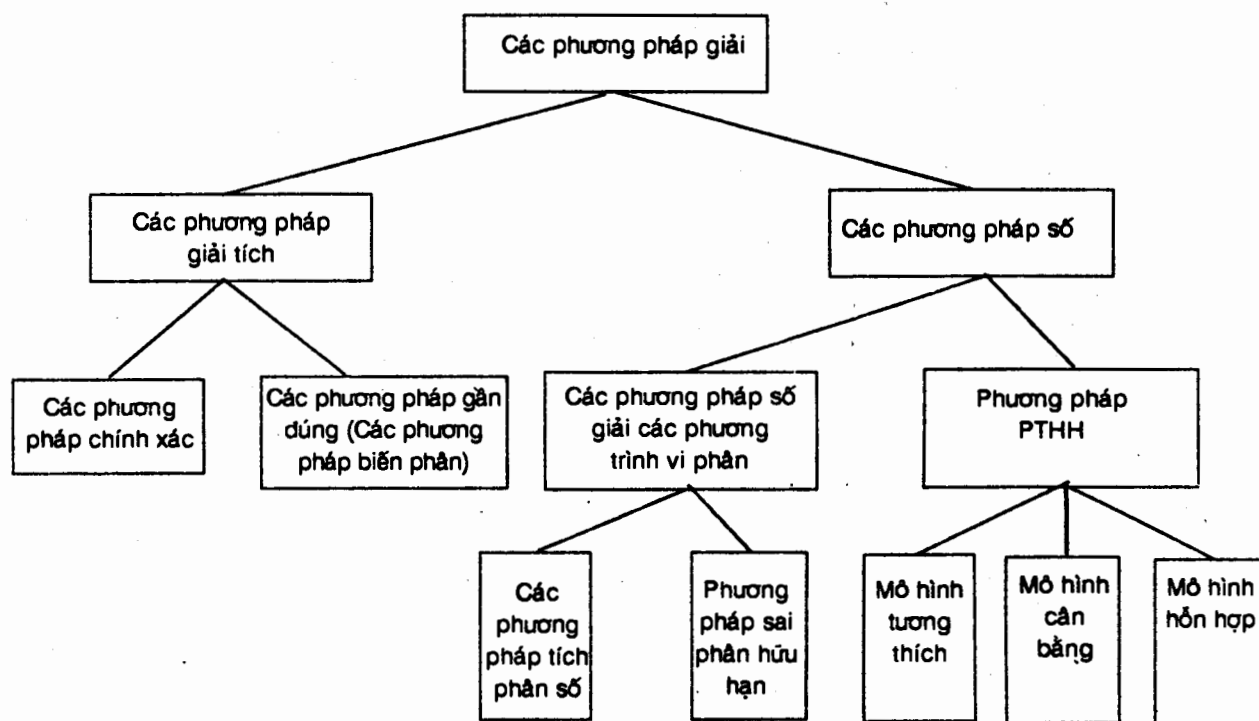
Và tất nhiên, nghiệm của bài toán cần thỏa mãn các điều kiện biên động học trên S_d và các điều kiện biên tĩnh học trên phần biên S_t .

§1.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CƠ VẬT RẮN BIẾN DẠNG, BÀI TOÁN ĐÀN HỒI

Như phần trên đã thấy, việc giải bài toán cơ vật rắn biến dạng nói chung hay bài toán đàn hồi nói riêng thực chất là, trong trường hợp tổng quát – bài toán 3 chiều, việc tìm 15 ẩn hàm đặc trưng cho trạng thái ứng suất – biến dạng – chuyển vị của vật thể từ 15 phương trình vi phân thỏa mãn các điều kiện biên động và tĩnh học đã cho. Để thấy rằng công việc này không dễ dàng và dường như không thực hiện được trong trường hợp tổng quát do các khó khăn toán học. Do vậy đã có nhiều phương pháp phân tích, phương pháp giải khác nhau để có thể tìm được nghiệm của bài toán.

Việc bàn về các phương pháp giải bài toán cơ trong trường hợp tổng quát thực chất là không đơn giản và giáo trình này không có tham vọng bàn kỹ về vấn đề này. Tuy nhiên để thấy rõ được phương pháp PTHH sau này, cũng cần sơ bộ bàn tới các phương pháp tính trong cơ học (cũng như trong các bài toán trường ổn định nói chung (bài toán truyền nhiệt, bài toán dòng chảy, bài toán electrostatic, magnetostatic, ...))

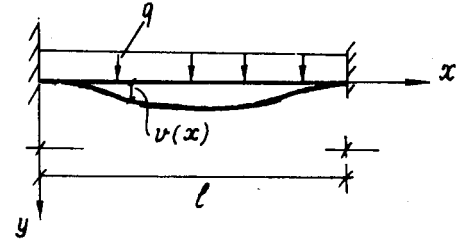
Có thể thấy sơ bộ các phương pháp giải bài toán cơ vật rắn biến dạng hay bài toán cơ kết cấu theo sơ đồ dưới:



Ở sơ đồ này, có thể thấy rằng, nghiệm của bài toán cơ có thể được tìm thấy trong dạng giải tích hoặc có thể chỉ là các giá trị số của các đại lượng cần tìm tại một số hữu hạn các điểm đã xác định trong miền V của vật thể khảo sát bằng các phương pháp giải thích hợp khác nhau. Mà trong đó, chúng ta có thể nêu một số phương pháp cụ thể.

1. Phương pháp chính xác (hay phương pháp tích phân trực tiếp):

Là các phương pháp tích phân trực tiếp hệ thống các phương trình vi phân của bài toán và thỏa mãn các điều kiện biên mà bài toán đã có. Tuy nhiên trong bài toán đàn hồi thay vì phải tìm đồng thời 15 hàm ẩn, người ta có thể làm nhẹ bài toán bằng cách xem các đại lượng nào đó (hoặc chuyển vị, hoặc ứng suất) là các ẩn cơ bản cần tìm trước hết. Cụ thể, khi giải theo chuyển vị, người ta xem 3 chuyển vị u , v , w là 3 ẩn hàm cơ bản và cần tìm trước. Sau khi đã tìm được chuyển vị mới tìm biến dạng và ứng suất. Khi bài toán được giải theo ứng suất, thì trước hết người ta sẽ thiết lập hệ thống 6 phương trình vi phân để tìm 6 hàm ẩn là ứng suất.



Hình 1.9

Để đơn giản ta xét thí dụ bài toán dầm chịu uốn như hình 1.9.

Như đã biết trong sức bền vật liệu, phương trình vi phân chủ đạo của bài toán này theo chuyển vị $v(x)$ là:

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - q = 0 \quad (\text{với } 0 < x < l) \quad (1.18)$$

Và điều kiện biên

$$\begin{cases} v(0) = v'(0) = 0 \\ v(l) = v'(l) = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Từ (1.18), ta có: $\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q}{EJ}$

Tích phân lên, cuối cùng ta được:

$$v(x) = \frac{q}{EJ} \left(\frac{x^4}{24} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \right)$$

Các hằng số tích phân C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định từ điều kiện biên (1.19) và là:

$$C_1 = -\frac{1}{12}, \quad C_2 = \frac{l^2}{24}, \quad C_3 = C_4 = 0$$

Vậy: Nghiệm của bài toán theo chuyển vị.

$$v(x) = \frac{q}{24EJ} (x^4 - 2lx^3 + l^2 x^2) \quad (1.20)$$

Dựa vào quan hệ vi phân giữa momen uốn M và đạo hàm của $v(x)$ ta tìm được biểu thức momen uốn.

$$M(x) = -EJ \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{q}{12} (6x^2 - 6lx + l^2)$$

Độ võng lớn nhất tại giữa nhịp ($x = l/2$) dễ thấy là:

$$v_{\max} = v \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{ql^4}{384EJ}$$

2. Các phương pháp biến phân:

Nhìn chung, các phương trình vi phân chủ đạo của nhiều bài toán cơ và kỹ thuật có thể biểu diễn ở dạng tổng quát: (Bài toán trị biên – Boundary value problem)

$$\begin{cases} L(u) + g = 0 \text{ trong miền } V \end{cases} \quad (1.21)$$

$$\begin{cases} C(u) = p \quad \text{trên biên } S \end{cases} \quad (1.22)$$

trong đó: L, C là các toán tử vi phân.

$u = u(x, y)$ là hàm của các biến độc lập (tọa độ điểm x, y) và là đại lượng cần tìm.

$\left. \begin{array}{l} g = g(x, y) \\ p = p(x, y) \end{array} \right\}$ là các hàm của biến độc lập và đã cho trước.

Khi đó một hàm $u = u(x, y)$ là nghiệm của bài toán nếu nó làm thỏa mãn phương trình (1.21) tại mọi điểm thuộc miền V và thỏa mãn (1.22) tại mọi điểm thuộc phần biên S .

Các phương pháp biến phân là các phương pháp gần đúng mà mục tiêu là nhằm tới việc tìm một nghiệm xấp xỉ gần đúng dựa trên một "tiêu chuẩn" nào đó được phát biểu trong dạng một biểu thức tích phân xác định lấy với toàn miền khảo sát V .

Các phương pháp biến phân thường gặp là: phương pháp biến phân Ritz, phương pháp Galerkin, phương pháp bình phương tối thiểu,

(a) Phương pháp Ritz:

Trong nhiều bài toán trị biên, người ta có thể chứng minh được sự tồn tại của một phiếm hàm I dạng:

$$I = \int_V F(x, y, u, u'_x, u''_{xx}, u'_y, u''_{yy}, \dots) dx dy \quad (1.23)$$

mà từ điều kiện dừng của phiếm hàm này sẽ cho phương trình vi phân (hoặc đạo hàm riêng) chủ đạo của bài toán. Nói cách khác:

Từ điều kiện $\delta I = 0$ sẽ dẫn ra được phương trình (1.21): $L(u) + g = 0$

(Ví dụ: phiếm hàm thế năng toàn phần Π của một hệ đàn hồi trong bài toán cơ kết cấu)

Và từ điều kiện $\delta \Pi = \delta(U - A) = 0$ sẽ dẫn ra được phương trình vi phân cân bằng. Ta sẽ bàn kỹ sau)

Khi đó, phương pháp Ritz nhằm vào mục tiêu tìm nghiệm xấp xỉ gần đúng trong dạng một tổ hợp tuyến tính các hàm xấp xỉ (approximation functions) như sau:

$$u(x, y) \approx u_N = \varphi_0(x, y) + \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i(x, y) \quad (1.24)$$

trong đó: $\varphi_0(x, y)$ là hàm được chọn để thỏa mãn các điều kiện biên cần thiết không

thuần nhất (essential boundary condition)

Trường hợp các điều kiện biên này là thuần nhất thì chọn $\varphi_0 = 0$

+ $\varphi_i(x,y)$ là các hàm thỏa mãn 3 điều kiện sau:

- φ_i phải đủ khả vi như đòi hỏi trong phiếm hàm I.
- phải thỏa mãn các điều kiện biên cần thiết dạng thuần nhất.
- với N nào đó thì tập hợp $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ là độc lập tuyến tính và đầy đủ.

(Các yêu cầu này bảo đảm sự hội tụ của nghiệm Ritz (u_N) đến nghiệm chính xác)

+ C_i : là các tham số sẽ được xác định từ điều kiện dừng của phiếm hàm I.
Cụ thể: Sau khi thay u_N vào I(u) và thực hiện tích phân, thì I là hàm của các tham số C_i hay:

$$I = I(C_1, C_2 \dots C_N)$$

Điều kiện: $\delta I = 0$ sẽ trở thành

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial C_1} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial C_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial I}{\partial C_N} = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Kết quả, ta nhận được một hệ phương trình đại số. Giải hệ phương trình này, ra C_i ($i = 1, 2, \dots N$) và như vậy, tìm được nghiệm xấp xỉ.

$$u_N = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i$$

(b) Các phương pháp phần dư có trọng (Weighted Residual Method)

• Vì không phải bài toán trị biên nào có phương trình vi phân chủ đạo như (1.21) cũng có thể tồn tại một phiếm hàm để sử dụng phương pháp Ritz nên người ta đưa ra những phương pháp khác.

$$\bullet \text{ Gọi: } R(u) = L(u) + g \quad (1.26)$$

là hàm phần dư (residual function).

Hiển nhiên nếu u là nghiệm của bài toán thì $R(u) = 0$

Nhưng, cũng như trong phương pháp Ritz, nếu chọn một nghiệm gần đúng dạng (1.24)

$$u_N = \varphi_0 + \sum C_i \varphi_i \quad (1.27)$$

trong đó: φ_0 : chọn sao cho thỏa mãn tất cả các điều kiện biên khác không ($\varphi_0 = 0$ nếu các điều kiện biên là thuần nhất)

$$\varphi_i \text{ phải } \begin{cases} - \text{đủ khả vi như yêu cầu của toán tử vi phân } L \\ - \text{thỏa mãn các điều kiện biên dạng thuần nhất} \\ - \text{tập hợp } \{\varphi_i\}_{i=1}^N \text{ là độc lập tuyến tính và đầy đủ (complete)} \end{cases}$$

thì rõ ràng $R(u_N) = L(u_N) + g \neq 0$

và $R(u_N) = R(x, y, C_1, C_2, \dots, C_N)$: tức là R là hàm của các biến số độc lập x, y và các tham số C_i ngay khi φ_0 và φ_i được chọn.

• Các tham số C_i được xác định sao cho tích phân phần dư có trọng số (weighted residual) trên toàn miền là bằng 0, tức là:

$$\int_V \psi_i R(u_N) dx dy = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.28)$$

trong đó: $\psi_i = \psi_i(x, y)$ là các hàm trọng số (weighted function)

Hiển nhiên tập hợp $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ là độc lập tuyến tính và đầy đủ và nói chung $\{\psi_i\} \neq \{\varphi_i\}$.

(Điều kiện (1.28) cũng có thể viết ở dạng khác, tổng quát hơn

$$w(u_N) = \int_V \{\psi_i\}^T R(u_N) dx dy = \sum_{i=1}^N \int_V \psi_i R(u_N) dx dy = 0$$

Thay u_N từ (1.27) vào (1.28):

$$\begin{aligned} \int_V \psi_i R(u_N) dx dy &= \int_V \psi_i [L(u_N) + g] dx dy = \\ &= \int_V \left[\sum_{j=1}^N C_j \psi_i L(\varphi_j) + \psi_i (L(\varphi_0) + g) \right] dx dy \\ &= \sum_{j=1}^N C_j \left(\int_V \psi_i L(\varphi_j) dx dy \right) + \left[\int_V \psi_i (L(\varphi_0) + g) dx dy \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Nếu đặt: } L_{ij} = \int_V \psi_i L(\varphi_j) dx dy, \quad g_i = \int_V \psi_i [L(\varphi_0) + g] dx dy$$

Kết quả ta nhận được một hệ phương trình đại số:

$$\sum_{j=1}^N L_{ij} C_j + g_i = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1.29)$$

Hay ở dạng ma trận: $[L] \{C\} + \{g\} = \{0\}$

Giải hệ phương trình trên ta được các C_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

Cuối cùng $u_N = \varphi_0 + \sum C_i \varphi_i$ xác định và là nghiệm gần đúng.

Với những cách chọn ψ_i khác nhau ta có các phương pháp dư có trọng khác nhau:

(+) *Phương pháp Galerkin*: là phương pháp dư có trọng khi ta lấy $\psi_i = \varphi_i$

Khi đó: nghiệm xấp xỉ dạng: $u_N = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i$ và các C_i được xác định từ điều kiện:

$$\int_V \varphi_i R(u_N) dx dy = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3, \dots N)$$

và được tìm thấy từ hệ phương trình đại số.

$$\sum_{j=1}^N L_{ij} C_j + g_i = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3, \dots N)$$

$$\text{trong đó } L_{ij} = \int_V \varphi_i L(\varphi_j) dx dy, \quad g_i = \int_V \varphi_i [L(\varphi_0) + g] dx dy \quad (1.30)$$

(c) *Phương pháp bình phương tối thiểu*:

Cũng như trên: tìm u_N dạng $u_N = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i$, nhưng các C_i được xác định từ điều kiện cực tiểu của tích phân phần dư $R(u_N)$ trên toàn miền V tức là từ điều kiện:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int_V R^2(u_N) dx dy = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3, \dots N)$$

$$\text{hay: } \int_V \frac{\partial R}{\partial C_i} R(u_N) dx dy = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3, \dots N)$$

So với phương pháp Galerkin thì xem ra ở phương pháp này, các hàm trọng số $\psi_i = \frac{\partial R}{\partial C_i}$

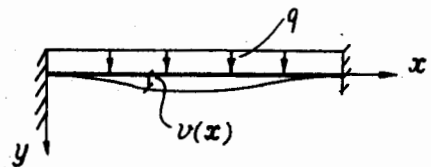
Thí dụ: Tìm hàm độ võng của dầm chịu uốn ở mục 1 theo phương pháp Galerkin (hình 1.10)

Từ phương trình vi phân chủ đạo đã có:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{q}{EJ} = 0 \quad (0 < x < l) \quad (1.31)$$

với điều kiện biên (1.19)

Theo phương pháp Galerkin, ta sẽ tìm hàm độ võng $v(x)$ trong dạng gần đúng.



Hình 1.10

$$v_N(x) = v_0 + \sum_{i=1}^N C_i v_i$$

Ở đây, C_i ($i = 1, 2, 3 \dots N$) là các tham số.

Trong đó ta chọn trước: $v_0(x) = 0$

$$v_i(x) = 1 - \cos \frac{2\prod i}{l} x = 1 - \cos \alpha_i x$$

với $\alpha_i = \frac{2\prod i}{l} \quad (i = 1, 2, 3, \dots N)$

Rõ ràng các hàm v_i thỏa mãn điều kiện biên (1.19)

Trong bài toán này dễ thấy rằng các toán tử vi phân có dạng:

$$L = \frac{d^4}{dx^4} \quad \text{và} \quad g = -\frac{q}{EJ}$$

Còn hàm dư $R(v_N) = L(v_N) + g$

$$R(v_N) = \sum_{i=1}^N C_i \frac{d^4 v_i}{dx^4} - \frac{q}{EJ} \neq 0$$

Các tham số C_i được xác định từ điều kiện.

$$\int_0^l v_i R(v_N) dx = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3 \dots N)$$

Hay ta có hệ phương trình đại số:

$$\sum_{j=1}^N L_{ij} C_j + g_i = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3 \dots N)$$

Áp dụng (1.30), ta xác định được các hệ số L_{ij} và số hạng tự do g_i

$$L_{ij} = \int_0^l v_i L(v_j) dx = \int_0^l v_i \frac{d^4 v_j}{dx^4} dx = - \int_0^l (1 - \cos \alpha_i x) \alpha_j^4 \cos \alpha_j x dx$$

$$\text{Dễ thấy là: } L_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{với } i \neq j \\ \frac{l \alpha_i^4}{2} & \text{với } i = j \end{cases} \quad (\text{với } i = 1, 2, 3 \dots N)$$

$$g_i = \int_0^l v_i [L(v_0) + g] dx = -\frac{q}{EJ} \int_0^l (1 - \cos \alpha_i x) dx = -\frac{ql}{EJ} \quad (\text{với } i = 1, 2, 3 \dots N)$$

Thay vào hệ phương trình trên ta có hệ phương trình:

$$\frac{l\alpha_i^4}{2} C_i - \frac{ql}{EJ} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Hãy từ đó dễ dàng tìm được C_i :

$$C_i = \frac{2q}{\alpha_i^4 EJ} = \frac{1}{8i^4 \pi^4} \cdot \frac{ql^4}{EJ} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Hàm độ võng $v(x)$ là:

$$v(x) \approx v_N(x) = \frac{ql^4}{EJ} \cdot \frac{1}{8\pi^4} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi i}{l} x \right)$$

Nếu chỉ lấy một số hạng đầu tiên ($N = 1$) ta có hàm độ võng.

$$v(x) = \frac{ql^4}{EJ} \cdot \frac{1}{8\pi^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{l} x \right)$$

Giá trị độ võng lớn nhất ở giữa dầm (tại $x = l/2$) là:

$$v_{\max} = v \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{ql^4}{4EJ\pi^4} = \frac{1}{389,6} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

So sánh giá trị $v_{\max}$ nhận được từ phương pháp tích phân trực tiếp, ta thấy kết quả này khá chính xác (chênh 1,4% so với giá trị chính xác).

3. Phương pháp sai phân hữu hạn:

Là một trong các phương pháp số để giải các phương trình vi phân mà tư tưởng chủ đạo của phương pháp là biểu diễn gần đúng đạo hàm bằng phép sai phân để thay thế các phương trình vi phân bằng một hệ thống các phương trình sai phân. Kết quả là thay vì cần "tích phân" các phương trình vi phân, người ta chỉ cần giải hệ thống các phương trình đại số.

Muốn vậy trước hết cần tìm cách biểu diễn gần đúng các đạo hàm các cấp theo giá trị hàm tại một số điểm định trước như sau.

Giả sử, trong bài toán một chiều, $f = f(x)$ là một hàm đã cho, xác định trong khoảng $[a, b]$. Khai triển Taylor của nó tại lân cận điểm x nào đó là:

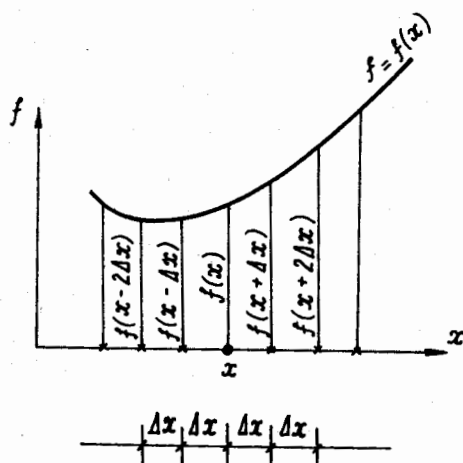
$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{df}{dx} \Big|_x \Delta x + \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_x \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{d^3f}{dx^3} \Big|_x \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \frac{d^4f}{dx^4} \Big|_x \frac{(\Delta x)^4}{4!} \quad (a)$$

$$f(x - \Delta x) \approx f(x) - \frac{df}{dx} \Big|_x \Delta x + \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_x \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{d^3f}{dx^3} \Big|_x \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \frac{d^4f}{dx^4} \Big|_x \frac{(\Delta x)^4}{4!} \quad (b)$$

Lấy (a) - (b) và chỉ xét 3 số hạng đầu, ta có:

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) \approx 2 \frac{df}{dx} \Big|_x \cdot \Delta x$$

hay: $\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$ (c)



Hình 1.11

Lấy (a) + (b), ta có:

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_x \cdot \Delta x^2$$

hay: $\frac{d^2f}{dx^2} \Big|_x \approx \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2}$ (d)

Vậy (c) và (d) cho ta khả năng tính gần đúng đạo hàm cấp 1 và 2 theo giá trị của hàm tại những điểm lân cận. Hay cho ta khả năng thay thế phép tính đạo hàm bằng phép tính sai phân. Bây giờ, nếu xem phép sai phân (d) như một toán tử thì hoàn toàn có thể biểu diễn gần đúng được đạo hàm cấp 4 của f tại x bằng cách thay thế $\frac{d^2f}{dx^2} \Big|_x$ vào vị trí của f trong (d). Cụ thể là:

$$\frac{d^4f}{dx^4} \Big|_x = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right) \Big|_x = \frac{\left(\frac{d^2f}{dx^2} \right) \Big|_{x+\Delta x} + \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right) \Big|_{x-\Delta x} - 2 \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right) \Big|_x}{\Delta x^2}$$

Tiếp tục thay (d) vào, ta được:

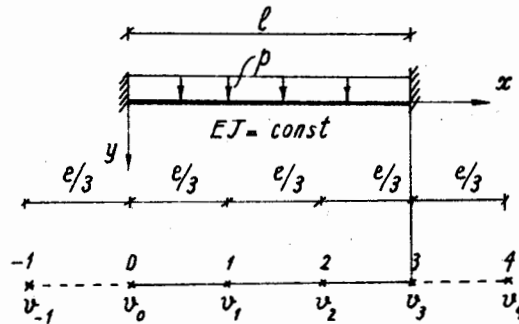
$$\frac{d^4f}{dx^4} \Big|_x = \frac{1}{\Delta x^2} \left\{ \left[\frac{f(x + 2\Delta x) + f(x) - 2f(x + \Delta x)}{\Delta x^2} \right] + \left[\frac{f(x) + f(x - 2\Delta x) - 2f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \right] - 2 \left[\frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2} \right] \right\}$$

Vậy, sau khi thu gọn, ta có:

$$\left. \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_x = \frac{1}{\Delta x^4} \{ 6f(x) - 4[f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x)] + f(x + 2\Delta x) + f(x - 2\Delta x) \} \quad (e)$$

Vậy nếu khoảng xác định $[a, b]$ được chia đều thành một số hữu hạn các đoạn nhỏ như nhau Δx bởi các điểm chia cách đều nhau thì ta có một “lưới sai phân”. Các điểm chia được gọi là các “nút” của lưới sai phân (hình vẽ). Khi đó các biểu thức (c), (d), (e) cho phép biểu diễn gần đúng đạo hàm các cấp (tất nhiên hoàn toàn làm được như cách trên) tại một điểm nút của lưới sai phân theo giá trị của hàm tại các điểm nút xung quanh. Bằng cách biểu diễn các đạo hàm như vậy, ta có thể thay thế phương trình vi phân đã cho bằng một hệ các phương trình sai phân viết cho tất cả các điểm “nút trong” của lưới. Giải hệ phương trình đại số này ta tìm được giá trị của hàm cần tìm tại các điểm nút.

Ví dụ như với bài toán trên là: Tìm nghiệm của phương trình vi phân.



Hình 1.12

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{p}{EJ} \text{ với } 0 < x < l \quad (f)$$

$$\text{với các điều kiện biên: } v \Big|_{x=0} = v \Big|_{x=l} = 0. \quad (g)$$

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{dv}{dx} \Big|_{x=l} = 0.$$

+ Chia lưới sai phân như hình 1.12 ($\Delta x = l/3$)

Các “nút trong” : 1; 2

Các “nút biên” : 0; 3

Các “nút ngoài” : -1; 4

Giá trị hàm v của các “nút biên” và “nút ngoài” sẽ tìm được dựa vào các điều kiện biên (g).

Giá trị hàm v của các “nút trong” sẽ có được từ việc giải hệ phương trình sai phân viết cho tất cả các nút trong.

Cụ thể: Viết phương trình sai phân tại các nút trong 1 và 2, bằng cách sử dụng (d):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tại nút 1 : } \frac{1}{\Delta x^4} (6v_1 - 4v_0 - 4v_2 + v_1 + v_3) = \frac{p}{EJ} \\ \text{Tại nút 2 : } \frac{1}{\Delta x^4} (6v_2 - 4v_1 - 4v_3 + v_0 + v_4) = \frac{p}{EJ} \end{array} \right\} \quad (h)$$

(h) là hệ phương trình vi phân thay thế phương trình vi phân (f) đã cho:

Từ điều kiện biên (g), có : $v_0 = v_3 = 0$ (i)

Để tìm giá trị v_{-1} , v_4 (các nút ngoài): sử dụng tiếp điều kiện biên về góc xoay, tức là sử dụng (c).

$$\text{Tại nút 0: } \left. \frac{dv}{dx} \right|_0 = \frac{v_1 - v_{-1}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow v_{-1} = v_1$$

$$\text{Tại nút 3, tương tự có: } \left. \frac{dv}{dx} \right|_3 = \frac{v_4 - v_2}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow v_4 = v_2 \quad (k)$$

Thay v_0 , v_3 , v_{-1} , v_4 vào (h) ta nhận được :

$$\left\{ \begin{array}{l} 7v_1 - 4v_2 = \frac{p}{EJ} \cdot \Delta x^4 \\ -4v_1 + 7v_2 = \frac{p}{EJ} \cdot \Delta x^4 \end{array} \right.$$

$$\text{Giải hệ phương trình này ta được: } v_1 = v_2 = \frac{1}{3} \Delta x^4 \frac{p}{EJ} = \frac{1}{3^5} \frac{pl^4}{EJ} \quad (l)$$

Vậy (i), (k), (l) cho ta kết quả là chuyển vị tại các nút của lưới.

Muốn tìm nội lực, ví dụ momen uốn tại các nút lưới thì sử dụng (d):

$$\text{và biểu thức } M(x) = -EJ \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Momen uốn tại 1 điểm nút, ví dụ tại nút 0 sẽ là:

$$M_0 = -EJ \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_0 = -EJ \left(\frac{v_1 + v_{-1} - 2v_0}{\Delta x^2} \right) = \frac{-EJ}{\Delta x^2} 2v_1 = -\frac{2}{27} pl^2$$

(chênh 11% so với kết quả chính xác)

So sánh với kết quả phương pháp chính xác (tích phân trực tiếp).

§1.3. CÁC NGUYÊN LÝ NĂNG LƯỢNG (CÁC NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN)

1. Nguyên lý thế năng toàn phần dừng hay nguyên lý biến phân về chuyển vị.

Thế năng toàn phần của một hệ đàn hồi Π được xác định là:

$$\Pi = U - A$$

trong đó: U- thế năng biến dạng của vật thể đàn hồi tích lũy trong quá trình biến dạng.

A- công của ngoại lực sinh ra trên các chuyển dời của ngoại lực do vật thể bị biến dạng.

Nội dung nguyên lý: Trong tất cả các trường chuyển vị (trạng thái chuyển vị) khả dĩ động (tức thỏa mãn các điều kiện tương thích và điều kiện biên động học) thì trường chuyển vị thực (tức trường chuyển vị tương ứng với sự cân bằng của vật thể) sẽ làm cho thế năng toàn phần Π đạt giá trị dừng.

Hay, khi vật thể cân bằng thì thế năng toàn phần Π đạt giá trị dừng.

Tức là: Nếu Π được biểu diễn theo chuyển vị $\{u\} = \{u, v, w\}^T$ thì vật thể cân bằng khi

$$\delta \Pi (\{u\}) = \delta U (\{u\}) - \delta A (\{u\}) = 0$$

Cụ thể hơn, như trong giáo trình sức bền vật liệu đã biết:

Thế năng biến dạng đàn hồi U được tính bởi công thức:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad \text{hay} \quad U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV$$

$$\text{Trường hợp có biến dạng ban đầu: } U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV - \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon_0\} dV$$

Còn công A của ngoại lực (gồm lực khối $\{g\}$, lực mặt $\{p\}$) trên các chuyển dời $\{u\}$ là

$$A = \int_V \{u\}^T \{g\} dV + \int_{S_t} \{u\}^T \{p\} dS$$

Và thế năng toàn phần Π viết ở dạng ma trận là:

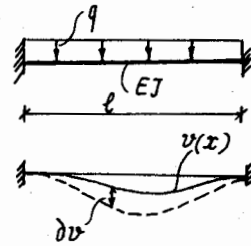
$$\Pi (\{u\}) = U - A = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] (\{\epsilon\} - 2\{\epsilon_0\}) dV - \int_V \{u\}^T \{g\} dV - \int_{S_t} \{u\}^T \{p\} dS$$

Theo nguyên lý này trường chuyển vị $\{u\}$ thỏa mãn các điều kiện biên và làm Π đạt giá trị dừng sẽ chính là trường chuyển vị thực và làm thỏa mãn các phương trình cân bằng.

Nếu dùng nguyên lý này để xây dựng phương trình phần tử hữu hạn, thì ta giả thiết một dạng đơn giản của chuyển vị trong mỗi phần tử và từ điều kiện dừng của phiếm hàm Π ta sẽ nhận được một hệ phương trình (xấp xỉ) cân bằng trong khi các điều kiện liên tục đã được thỏa mãn.

Hay có thể nói rằng nguyên lý này cho các phương trình cân bằng.

Thí dụ: Xét dầm chịu tải trọng phân bố đều (hình 1.13). Ta sẽ chứng minh rằng nguyên lý Lagrange sẽ cho phương trình cân bằng được viết theo chuyển vị.



Hình 1.13

Theo SBVL và cơ học kết cấu, đã biết thế năng biến dạng U của dầm chịu uốn là:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx \quad \text{và} \quad M = -EJ \frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{Vậy: } U = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx$$

$$A = \int_0^l qv dx$$

Ta có, thế năng toàn phần $\Pi = U - A = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l qv dx$

Theo nguyên lý thế năng toàn phần dừng : $v(x)$ sẽ là thực nếu $\delta\Pi = \delta U - \delta A = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Mà: } \delta U &= \frac{EJ}{2} \int_0^l 2 \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \delta \frac{d^2v}{dx^2} dx = EJ \int_0^l \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d^2\delta v}{dx^2} dx \\ &= EJ \left[\frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d\delta v}{dx} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d\delta v}{dx} \cdot \frac{d^3v}{dx^3} dx \right] \\ &= EJ \left[\frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d\delta v}{dx} \Big|_0^l - \frac{d^3v}{dx^3} \cdot \delta v \Big|_0^l + \int_0^l \frac{d^4v}{dx^4} \cdot \delta v \cdot dx \right] \end{aligned}$$

$$\text{và } \delta A = \int_0^l q \delta v \cdot dx$$

$$\text{Hay : } \delta\Pi = \int_0^l \left(EJ \frac{d^4v}{dx^4} - q \right) \delta v \cdot dx + \left[EJ \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d\delta v}{dx} \Big|_0^l - EJ \frac{d^3v}{dx^3} \cdot \delta v \Big|_0^l \right]$$

Tuy nhiên theo điều kiện biên bài toán, chuyển vị góc xoay tại $x = 0$ và $x = l$ là đã cho trước và bằng 0 nên ta cũng có.

$$\delta v = \frac{d\delta v}{dx} = 0 \quad \text{tại } x = 0 \text{ và } x = l$$

Vậy :
$$\delta \Pi = \int_0^l \left(EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - q \right) \delta v \cdot dx = 0$$

Để thỏa mãn với mọi $\delta v \neq 0$, ta có:
$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - q = 0$$

Đây chính là phương trình cân bằng của dầm chịu uốn được viết theo chuyển vị.

• Áp dụng nguyên lý, tìm nghiệm gần đúng (phương pháp Rayleigh).
Nội dung phương pháp Rayleigh: Chọn nghiệm gần đúng trong dạng nào đó thỏa mãn điều kiện biên để giải bài toán dầm chịu uốn như hình 1.14.

Ví dụ: Chọn $v(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4$ (a)

(với $0 \leq x \leq l$)

$v(x)$ trước hết cần là khả di động, tức thỏa mãn các điều kiện biên và liên tục như sau:

$$v \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$v \Big|_{x=l} = 0 \rightarrow C_3l^2 + C_4l^3 + C_5l^4 = 0$$

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \rightarrow 2C_3l + 3C_4l^2 + 4C_5l^3 = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{dv}{dx} \Big|_{x=l} = 0} \right\} \rightarrow \begin{cases} C_3 = C_5l^2 \\ C_4 = -2C_5l \end{cases} \quad (b)$$

Thay (b) vào (a) ta được: $v(x) = C_5(x^4 - 2lx^3 + l^2x^2)$

Vậy:
$$\frac{d^2 v}{dx^2} = C_5(12x^2 - 12lx + 2l^2) = 2C_5(6x^2 - 6x + l^2)$$

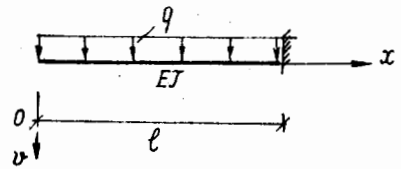
Tính $\Pi = U - A = \frac{EJ}{2} \int_0^l \frac{d^2 v}{dx^2} dx - \int_0^l qv dx$

$$= \frac{EJ}{2} \int_0^l 4C_5^2 (6x^2 - 6xl + l^2) dx - q \int_0^l C_5(x^4 - 2lx^3 + lx^2) dx$$

Thực hiện tích phân, với chú ý là C_5 là một tham số, ta nhận được biểu thức thế năng là hàm của thông số C_5 như sau:

$$\Pi(C_5) = \frac{2}{5} EJ l^5 C_5^2 - \frac{1}{30} ql^5 C_5$$

Từ điều kiện



Hình 1.14

$$\delta\Pi = 0 \sim \frac{\partial\Pi}{\partial C_5} = 0$$

Ta nhận được phương trình đại số sau:

$$\frac{4}{5} E\pi^5 C_5 - \frac{1}{30} q l^5 = 0 \rightarrow C_5 = \frac{1}{24} \frac{q}{EJ}$$

Vậy
$$v(x) = \frac{1}{24} \frac{q}{EJ} (x^4 - 2lx^3 + l^2x^2)$$

(Trùng với kết quả chính xác nhận được từ phương pháp tích phân trực tiếp đã có ở trên)

• *Phương pháp Ritz - Rayleigh*: Theo phương pháp này hàm chuyển vị $v(x)$ được biểu diễn gần đúng như tổ hợp tuyến tính của các hàm $v_i(x)$ thỏa mãn điều kiện biên động học của bài toán.

$$v(x) = \sum_{i=1}^n C_i v_i(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) + \dots C_n v_n(x).$$

trong đó: $v_i(x)$ là các hàm khả dĩ động, tức liên tục và thỏa mãn điều kiện biên động học của bài toán và được chọn trước.

C_i là các tham số sẽ được xác định từ điều kiện cực trị của thế năng toàn phần Π . Sau khi thay $v(x)$ vào biểu thức thế năng toàn phần Π ta được một Π chỉ phụ thuộc các tham số C_i nghĩa là $\Pi(C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Từ điều kiện cực trị của Π : $\delta\Pi = 0 \rightarrow$ ta có một hệ n phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial\Pi}{\partial C_1} = 0 \\ \frac{\partial\Pi}{\partial C_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial\Pi}{\partial C_n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Giải hệ phương trình ta được các } C_i \Rightarrow \text{vậy } v(x) \text{ là xác định}$$

Thí dụ: Trở lại bài toán dầm chịu uốn ở bài 1.2. Nay tìm nghiệm gần đúng theo phương pháp Ritz.

Xem gần đúng $v(x) = \sum_{i=1}^n C_i \left(1 - \cos \frac{2i\pi}{l} x \right)$

trong đó: C_i là các tham số.

Các hàm chọn trước: $v_i = \left(1 - \cos \frac{2i\pi}{l} x \right)$ rõ ràng thỏa mãn điều kiện biên:

$$\begin{cases} v_i = 0 & \text{tại } x = 0 \text{ và } x = l \\ \frac{dv_i}{dx} = 0 & \text{tại } x = 0 \text{ và } x = l \end{cases}$$

v_i là liên tục và khả vi trên đoạn $0 < x < l$

Tính sẵn: $v_i(x) = (1 - \cos \alpha_i x)$ với $\alpha_i = \frac{2i\pi}{l}$

$$\frac{dv_i}{dx} = \alpha_i \sin \alpha_i x$$

Vậy:
$$\frac{d^2 v_i}{dx^2} = -\alpha_i^2 \cos \alpha_i x \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \sum_{i=1}^n C_i \alpha_i^2 \cos \alpha_i x$$

Tính $\Pi = U - A = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l q v dx$

$$= \frac{EJ}{2} \int_0^l (\sum C_i \alpha_i^2 \cos \alpha_i x)^2 dx - q \int_0^l (\sum C_i (1 - \cos \alpha_i x)) dx =$$

Chỉ cần nhớ rằng $\int_0^l \cos \alpha_i x \cdot \cos \alpha_j x dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ \frac{l}{2} & \text{nếu } i = j \end{cases}$

Ta có: $\Pi = \frac{EJ}{2} \sum C_i^2 \alpha_i^4 \cdot \frac{l}{2} - q \sum C_i l = \frac{EJl}{4} \sum C_i^2 \alpha_i^4 - ql \sum C_i = \Pi(C_1, C_2, C_n)$

Theo nguyên lý Lagrange, $v(x)$ là thực, tức thỏa mãn điều kiện cân bằng khi và chỉ khi $\partial \Pi = 0$

Hay: $\partial \Pi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial C_i} = 0$ (với $i = 1, 2, \dots, n$)

Vậy ta có: $\frac{EJl}{2} C_i \alpha_i^4 - ql = 0$ (với $i = 1, 2, \dots, n$)

Vậy
$$C_i = \frac{2q}{EJ \alpha_i^4} = \frac{2q}{EJ \frac{2^4 \cdot i^4 \pi^4}{l^4}} = \frac{ql^4}{EJ} \cdot \frac{1}{8i^4 \pi^4} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Và
$$v(x) = \frac{ql^4}{8EJ\pi^4} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^4} \left(1 - \cos \frac{2i\pi}{l} x \right)$$

Kết quả giống như khi áp dụng phương pháp Galerkin ở mục trên.

2) Nguyên lý cực tiểu của năng lượng bù toàn phần, (nguyên lý biến phân của ứng suất).

Năng lượng bù toàn phần của 1 vật thể đàn hồi Π^* được định nghĩa là:

$$\Pi^* = U^* - A^*$$

Trong đó:

U^* là năng lượng bù của biến dạng - là phần diện tích gạch ngang ở hình 1.15.

Trường hợp đàn hồi tuyến tính.

$$U^* = U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dv \quad (\text{là phiếm hàm}$$

của $\{\sigma\}$) hay nếu có biến dạng ban đầu $\{\epsilon_0\}$:

$$U^* = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T ([C]\{\sigma\} + 2\{\epsilon_0\}) dv$$

A^* : công bù của ngoại lực.

$$A^* = \int_{S_d} \{p\}^T \{u\} dS \quad \text{trong đó } S_d \text{ là phần biên đã biết chuyển vị } \{u\}$$

$$\text{và} \quad \Pi^*(\sigma) = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T ([C]\{\sigma\} + 2\{\epsilon_0\}) - \int_{S_d} \{p\}^T \{u\} dS$$

Nội dung nguyên lý cực trị của năng lượng bù toàn phần: Trong tất cả các trường ứng suất khả dĩ tĩnh (tức thỏa mãn các điều kiện cân bằng và điều kiện biên tĩnh học trên S_t) thì trường ứng suất thực (tương ứng thỏa mãn điều kiện tương thích) sẽ làm năng lượng bù toàn phần Π^* đạt giá trị dừng.

$$\delta \Pi^*(\{\sigma\}) = \sigma U^*(\{\sigma\}) - \sigma A^*(\{\sigma\}) = 0$$

Thí dụ: Xác định nội lực dầm như các bài toán trên.

Gọi phản lực và mômen phản lực tại A là V_A và M_A chưa biết. Nhưng rõ ràng hệ nội lực do nó và tải trọng q gây ra trong dầm là cân bằng thì có nghĩa là khả dĩ tĩnh.

Và khi đó ta có biểu thức nội lực: (Hình 1.16)

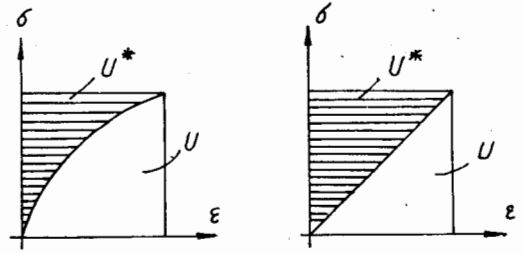
$$M(x) = V_A x - M_A - \frac{qx^2}{2}$$

Nhưng rõ ràng việc bỏ đi liên kết A sẽ không bảo đảm điều kiện tương thích (hay động học). Muốn bảo đảm điều kiện này (ví dụ: góc xoay và chuyển vị tại A là bằng không).

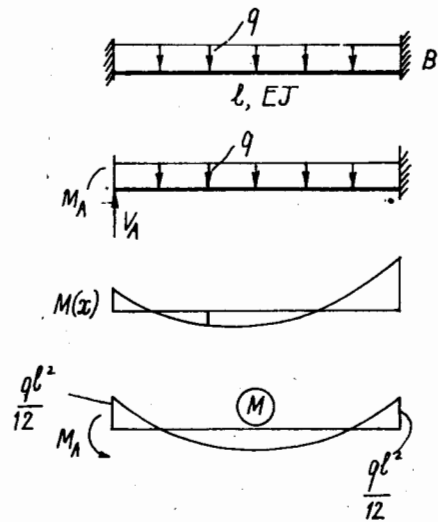
Nhưng nếu ta tìm được V_A và M_A sao cho Π^* cực trị thì đó là nghiệm và thỏa mãn điều kiện tương thích (liên tục) về biến dạng.

$$\Pi^* = U^* - A^*$$

Công bù của ngoại lực trên phần biên đã biết chuyển vị là A^*



Hình 1.15



Hình 1.16

$$A^* = V_A \cdot 0 + M_A \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } \Pi^* = U^* &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^l \left(V_A x - M_A - \frac{qx^2}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2EJ} \left[\frac{V_A^2 l^3}{3} + M_A^2 l + \frac{q^2 l^5}{20} - V_A M_A l^2 - \frac{V_A q l^4}{4} + M_A \frac{q l^3}{3} \right] \end{aligned}$$

Theo nguyên lý này:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi^*}{\partial V_A} = \frac{1}{2EJ} \left[\frac{2V_A l^3}{3} - M_A l^2 - \frac{q l^4}{4} \right] = 0 \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial M_A} = \frac{1}{2EJ} \left[2M_A l - V_A l^2 + \frac{q l^3}{3} \right] = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} M_A = \frac{1}{12} q l^2 \\ V_A = \frac{q l}{2} \end{cases}$$

Nhận xét: Có thể viết lại 2 phương trình trên:

$$\begin{cases} \frac{l^3}{3EJ} V_A - \frac{l^2}{EJ} M_A - \frac{q l^4}{4EJ} = 0 \\ -\frac{l^2}{EJ} V_A + \frac{l}{EJ} M_A + \frac{q l^3}{3EJ} = 0 \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} \delta_{11} V_A + \delta_{12} M_A - \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} V_A + \delta_{22} M_A - \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Đây chính là hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực đã biết trong Giáo trình Cơ học kết cấu. Và 2 phương trình này là điều kiện tương thích của biến dạng, cụ thể, là điều kiện chuyển vị và góc xoay tại A phải bằng 0.



Chương 2

Cơ sở và các bước phân tích chung của phương pháp phần tử hữu hạn

§2-1. Khái niệm về phương pháp phần tử hữu hạn.

Phương pháp phần tử hữu hạn (PP PTHH) là một phương pháp số đặc biệt có hiệu quả để tìm dạng gần đúng của một hàm chưa biết trong miền xác định V của nó. Tuy nhiên PP PTHH không tìm dạng xấp xỉ của hàm cần tìm trên toàn miền V mà chỉ trong từng miền con V_e (phần tử) thuộc miền xác định V . Do đó phương pháp này rất thích hợp với hàng loạt bài toán vật lý và kỹ thuật trong đó hàm cần tìm được xác định trên những miền phức tạp gồm nhiều vùng nhỏ có đặc tính hình học, vật lý khác nhau, chịu những điều kiện biên khác nhau. Phương pháp ra đời từ trực quan phân tích kết cấu, rồi được phát biểu một cách chặt chẽ và tổng quát như một phương pháp biến phân hay phương pháp dư có trọng số nhưng được xấp xỉ trên mỗi phần tử.

Trong PP PTHH miền V được chia thành một số hữu hạn các miền con, gọi là *phần tử*. Các phần tử này được nối kết với nhau tại *các điểm định trước* trên biên phần tử, gọi là *nút*. Trong phạm vi mỗi phần tử đại lượng cần tìm được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản được gọi là các *hàm xấp xỉ* (approximation function). Và các hàm xấp xỉ này được biểu diễn qua các giá trị của hàm (và có khi cả các giá trị của đạo hàm của nó) tại các điểm nút trên phần tử. Các giá trị này được gọi là *các bậc tự do của phần tử* và được xem là ẩn số cần tìm của bài toán.

Với bài toán cơ vật rắn biến dạng và cơ kết cấu *tùy theo ý nghĩa vật lý của hàm xấp xỉ*, người ta có thể phân tích bài toán theo ba loại mô hình sau:

1. Trong mô hình tương thích:

Người ta xem chuyển vị là đại lượng cần tìm trước và hàm xấp xỉ biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử. Các ẩn số được xác định từ hệ phương trình thiết lập trên cơ sở nguyên lý thế năng toàn phần dừng, hay nguyên lý biến phân Lagrange.

2. Theo mô hình cân bằng:

Hàm xấp xỉ biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử. Các ẩn số được xác định từ hệ phương trình thiết lập trên cơ sở nguyên lý năng lượng hệ toàn phần dừng hay nguyên lý biến phân về ứng suất (nguyên lý Castigliano).

3. Theo mô hình hỗn hợp:

Coi các đại lượng chuyển vị ứng suất là 2 yếu tố độc lập. Các hàm xấp xỉ biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử. Các ẩn số được xác định từ hệ phương trình thiết lập trên cơ sở nguyên lý biến phân Reisner.

Sau khi tìm được các ẩn số bằng việc giải một hệ phương trình đại số vừa nhận được thì cũng có nghĩa là ta tìm được các xấp xỉ biểu diễn đại lượng cần tìm trong tất cả các phần tử. Và từ đó cũng tìm được các đại lượng còn lại.

Trong 3 mô hình trên, mô hình tương thích được sử dụng rộng rãi hơn cả. Và giáo trình này cũng chỉ trình bày PP PTHH theo mô hình tương thích.

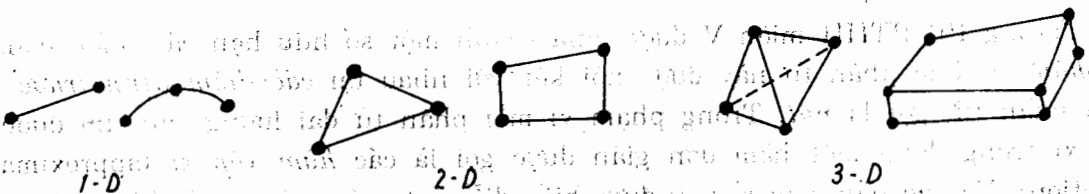
§2-2. Trình tự phân tích bài toán theo phương pháp PTHH.

Bước 1: Rời rạc hóa miền khảo sát.

Trong bước này, miền khảo sát V được chia thành các miền con V_e hay thành các phần tử có dạng hình học thích hợp.

Với bài toán cụ thể số phần tử, hình dạng hình học của phần tử cũng như kích thước các phần tử phải được xác định rõ. Số điểm nút mỗi phần tử không lấy được 1 cách tùy tiện mà tùy thuộc vào hàm xấp xỉ định chọn.

Các phần tử thường có dạng hình học đơn giản. (Hình 2.1)



Hình 2.1- Dạng hình học đơn giản của các phần tử

Bước 2: Chọn hàm xấp xỉ thích hợp.

Vì đại lượng cần tìm là chưa biết, nên ta giả thiết dạng xấp xỉ của nó sao cho đơn giản đối với tính toán bằng máy tính nhưng phải thỏa mãn các tiêu chuẩn hội tụ (sẽ nói sau). Và thường chọn ở dạng đa thức.

Rồi biểu diễn hàm xấp xỉ theo tập hợp giá trị và có thể cả các đạo hàm của nó tại các nút của phần tử $\{q\}_e$.

Bước 3: Xây dựng phương trình phần tử, hay thiết lập ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ và vectơ tải phần tử $\{P\}_e$.

Có nhiều cách thiết lập: trực tiếp, hoặc sử dụng nguyên lý biến phân, hoặc các phương pháp biến phân,...

Kết quả nhận được có thể biểu diễn một cách hình thức như một phương trình phân tử: $[K]_e \{q\}_e = \{P\}_e$

Bước 4: Ghép nối các phần tử trên cơ sở mô hình tương thức mà kết quả là hệ thống phương trình.

$$[\bar{K}] \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}$$

Trong đó, có thể gọi:

$[\bar{K}]$: ma trận độ cứng tổng thể (hay ma trận hệ số toàn miền)

$\{\bar{q}\}$: vectơ tập hợp các giá trị đại lượng cần tìm tại các nút (còn gọi là vectơ chuyển vị nút tổng thể)

$\{\bar{P}\}$: vectơ các số hạng tự do tổng thể (hay vectơ tải tổng thể)

Rồi sử dụng điều kiện biên của bài toán, mà kết quả là nhận được hệ phương trình sau:

$$[K^*] \{q^*\} = \{P^*\}$$

Đây chính là phương trình hệ thống hay còn gọi là hệ phương trình để giải

Bước 5: Giải hệ phương trình đại số.

$$[K^*] \{q^*\} = \{P^*\}$$

Với bài toán tuyến tính việc giải hệ phương trình đại số là không khó khăn. Kết quả là tìm được các chuyển vị của các nút.

Nhưng với bài toán phi tuyến thì nghiệm sẽ đạt được sau 1 chuỗi các bước lặp mà sau mỗi bước ma trận cứng $[K]$ thay đổi (trong bài toán phi tuyến vật lý) hay vectơ lực nút $\{P\}$ thay đổi (trong bài toán phi tuyến hình học)

Bước 6: Hoàn thiện:

Từ kết quả ở trên, tiếp tục tìm ứng suất, chuyển vị hay biến dạng của tất cả các phần tử.

§ 2.3. Hàm xấp xỉ – đa thức xấp xỉ – phép nội suy

1- Hàm xấp xỉ:

Một trong những tư tưởng cơ bản của PPPTHH là xấp xỉ hóa đại lượng cần tìm trong mỗi miền con – phần tử V_e . Điều này cho phép ta khả năng thay thế việc tìm nghiệm vốn phức tạp trên toàn miền V bằng việc tìm nghiệm trong phạm vi mỗi phần tử ở dạng hàm xấp xỉ đơn giản. Và vì vậy bước quan trọng đầu tiên cần nói đến là việc chọn hàm đơn giản mô tả gần đúng đại lượng cần tìm trong phạm vi mỗi phần tử. Hàm đơn giản này thường chọn ở dạng đa thức vì những lý do sau:

- + Đa thức khi được xem như một tổ hợp tuyến tính của các đơn thức thì tập hợp các đơn thức thỏa mãn yêu cầu độc lập tuyến tính như yêu cầu của Ritz, Galerkin

- + Hàm xấp xỉ dạng đa thức thường dễ tính toán, dễ thiết lập công thức khi xây dựng các phương trình của PPPTHH và tính toán bằng máy tính. Đặc biệt vì dễ đạo hàm, tích phân

- + Có khả năng tăng độ chính xác bằng cách tăng số bậc của đa thức xấp xỉ (về mặt lý thuyết thì đa thức bậc vô cùng sẽ cho nghiệm chính xác). Tuy nhiên

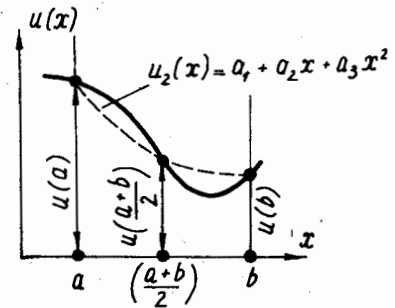
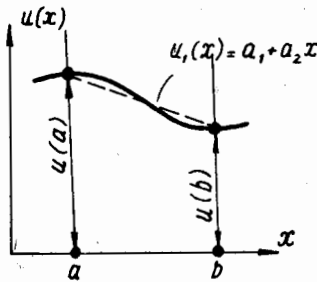
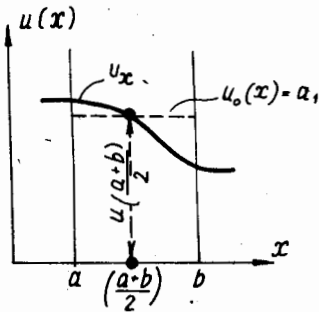
Trong thực tế ta cũng chỉ lấy các đa thức xấp xỉ bậc thấp mà thôi. Chú ý là các hàm xấp xỉ dạng hàm lượng giác cũng có tính chất và ưu điểm như trên nhưng ít dùng.

2. Phép nội suy:

Tuy nhiên, trong phương pháp PTHH các hệ số của hàm xấp xỉ dạng đa thức được biểu diễn qua chính các giá trị của nó (hoặc cả giá trị các đạo hàm) tại một điểm nút được định trước trên phần tử.

Nói cách khác là hàm xấp xỉ được nội suy theo các giá trị (hoặc cả các đạo hàm) của nó tại các nút phần tử. Kết quả là, trong phạm vi mỗi phần tử đại lượng cần tìm là hàm bất kỳ sẽ được xấp xỉ hóa bằng một đa thức nội suy qua các giá trị (hoặc cả các đạo hàm) của chính nó tại các điểm nút của phần tử.

Ví dụ: (Hình 2.2)



Nội suy (xấp xỉ) hằng số

$$(u)_x \approx u_0 = u\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Nội suy tuyến tính

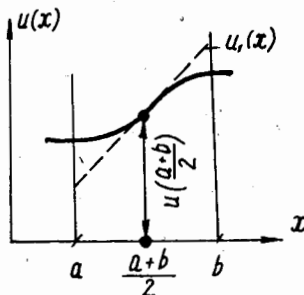
$$u(x) \approx u_1(x) = \frac{bu(a) - au(b)}{b-a} + \frac{u(b) - u(a)}{b-a}x$$

Nội suy bậc 2.

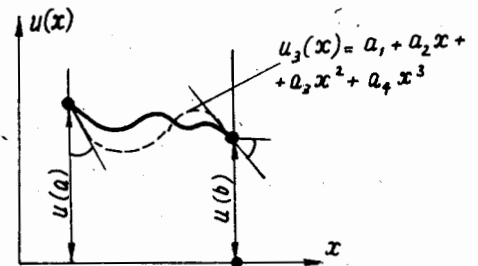
Trong các ví dụ trên các hàm bất kỳ được biểu diễn xấp xỉ bằng các đa thức bậc 0, bậc 1, bậc 2 theo giá trị (chỉ theo giá trị) của hàm tại các điểm định trước (điểm nút). Phép xấp xỉ này được gọi là phép nội suy Lagrange.

Nội suy Hecmit: Khác với phép nội suy Lagrange, nội suy Hecmit là phép xấp xỉ theo giá trị và cả đạo hàm từ bậc 1 đến bậc nào đó tại các điểm cơ sở.

Ví dụ: Hình 2.3



Hình 2.3



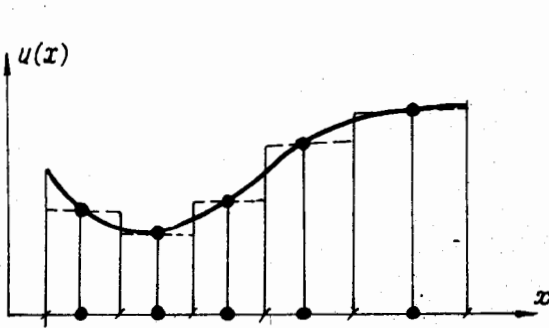
Xấp xỉ bậc 3 theo giá trị và đạo hàm cấp 1 tại 2 điểm cơ sở.

Bằng việc xấp xỉ hóa đại lượng cần tìm trong phạm vi mỗi phần tử thì trên toàn miền V khảo sát, đại lượng cần tìm cũng được biểu diễn gần đúng theo giá trị

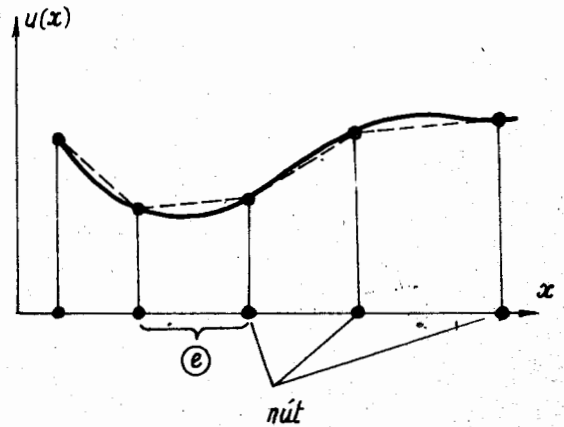
(và có thể cả đạo hàm đến cấp nào đó) của chính nó tại các điểm nút.

Và rõ ràng nếu lưới phần tử càng mịn thì kết quả nhận được càng tiến đến sự mô tả chính xác của nghiệm cần tìm.

Thí dụ: Với nội suy Lagrange (hình 2.4)



Hình 2.4



3- Dạng đa thức xấp xỉ:

Như đã nói ở trên, hàm xấp xỉ được chọn dưới dạng đa thức đơn giản. Có thể như sau:

Bài toán 1 - D: $u(x) = a_1 + a_2 x$ (xấp xỉ tuyến tính)

$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ (xấp xỉ bậc 2)

$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$ (xấp xỉ bậc 3)

hay nếu lấy $u(x)$ là một xấp xỉ bậc n thì

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{i-1}$$

$$\text{Hay: } u(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^n] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{Bmatrix}$$

Hay: $u(x) = [P(x)] \{a\}$

Trong đó: $[P(x)]$ - Gọi là ma trận các đơn thức.

$\{a\}$ - Vectơ các tọa độ tổng quát hay vectơ các tham số.

Ở bài toán 2 - D: ví dụ: $u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 xy$.

$$= [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

$$u(x,y) = [P(x,y)] \{a\}$$

$$\text{Ở bài toán 3-D: } u(x,y,z) = [P(x,y,z)] \{a\} \quad (2.1)$$

trong đó $[P(x,y,z)]$ ví dụ trong trường hợp xấp xỉ là tuyến tính:

$$[P(x,y,z)] = [1 \quad x \quad y \quad z]$$

Trường hợp u là trường vectơ, và xấp xỉ là tuyến tính:

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{Bmatrix}$$

tức là, $\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \\ a_5 + a_6x + a_7y + a_8z \\ a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z \end{Bmatrix}$

4. Chọn bậc của đa thức xấp xỉ (hay của hàm xấp xỉ)

Khi chọn bậc của đa thức xấp xỉ cần xét tới các yêu cầu sau:

a. Các đa thức xấp xỉ phải thỏa mãn điều kiện hội tụ:

Đây là một yêu cầu quan trọng vì PPPTHH là một phương pháp số và do đó phải bảo đảm được rằng khi kích thước phần tử giảm đi thì kết quả sẽ hội tụ đến nghiệm chính xác. Muốn vậy đa thức xấp xỉ u_e phải thỏa mãn 3 điều kiện sau:

+ Liên tục trong phần tử (V_e). Điều này hiển nhiên thỏa mãn khi xấp xỉ là đa thức

+ Bảo đảm tồn tại trong phần tử trạng thái đơn vị (hằng số) và các đạo hàm riêng của nó đến bậc cao nhất mà phiếm hàm $I(u)$ đòi hỏi.

Vì như ta đã biết, PPPTHH có thể được xem như một phương pháp xấp xỉ khi cực tiểu hóa một phiếm hàm dạng.

$$I(u) = \int_V F(x, u, u', u'', \dots, u^{(r)}) dx$$

+ Trên biên phần tử, u và các đạo hàm của nó đến cấp $(r-1)$ là liên tục.

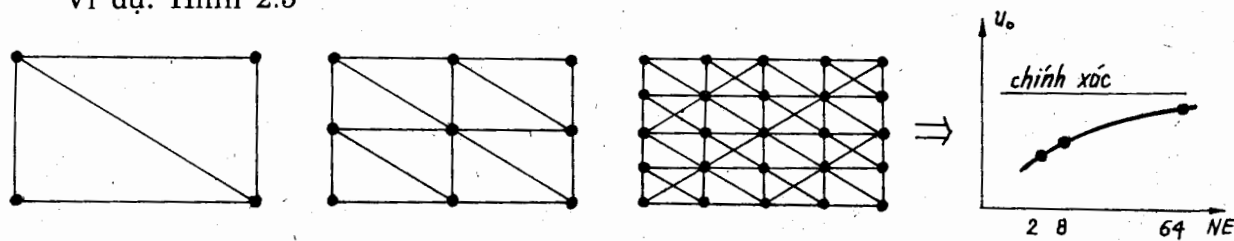
Ví dụ: Khi u là chuyển vị thì phải bảo đảm khả năng phần tử dịch chuyển cứng và muốn bảo đảm trạng thái đơn vị của đại lượng khảo sát thì chỉ cần không được bỏ qua số hạng tự do a_1 trong đa thức xấp xỉ, hay không được bỏ qua thành phần 1 trong $[P(x,y,z)]$.

Với cơ vật rắn biến dạng và kết cấu các yêu cầu này có thể được hiểu như yêu cầu liên tục của biến dạng, nói cách khác là phần tử biến dạng không có sự đứt, gãy. Như với dầm, tấm, vỏ đòi hỏi cả chuyển vị và đạo hàm cấp 1 của chuyển vị là liên tục. Nếu đa thức xấp xỉ thỏa mãn tất cả 3 điều kiện này, thì nghiệm xấp xỉ sẽ hội tụ tới nghiệm chính xác khi sử dụng lưới phần tử mịn hơn. Tuy nhiên để thấy được điều này khi mịn hóa lưới phần tử cũng cần tuân theo các qui tắc sau:

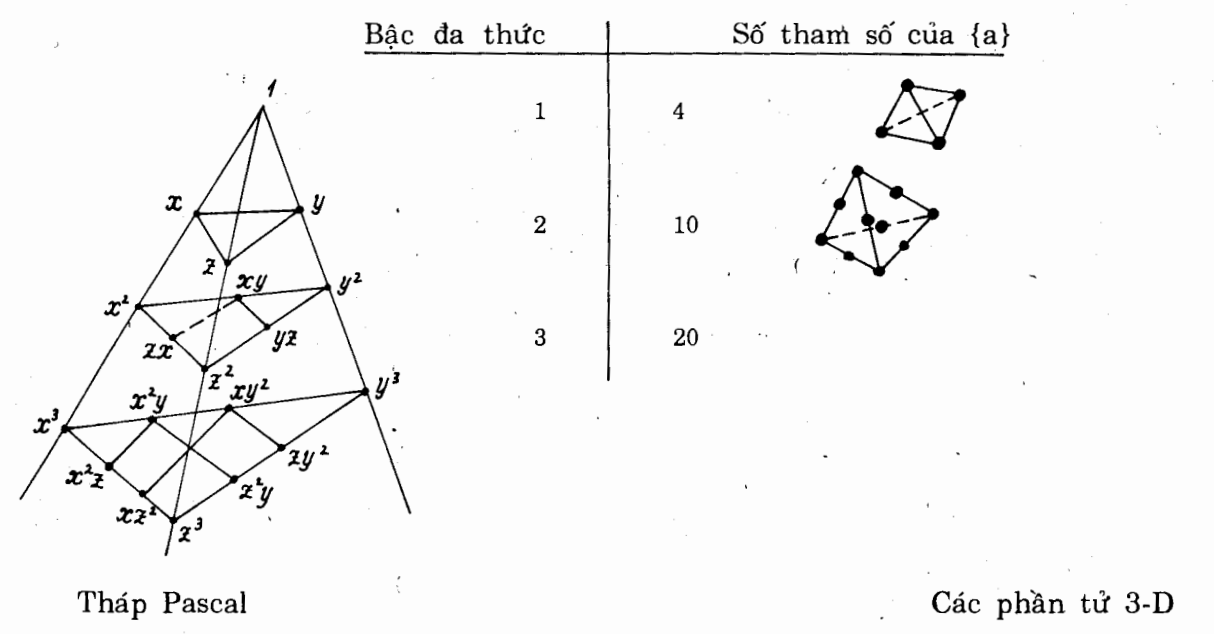
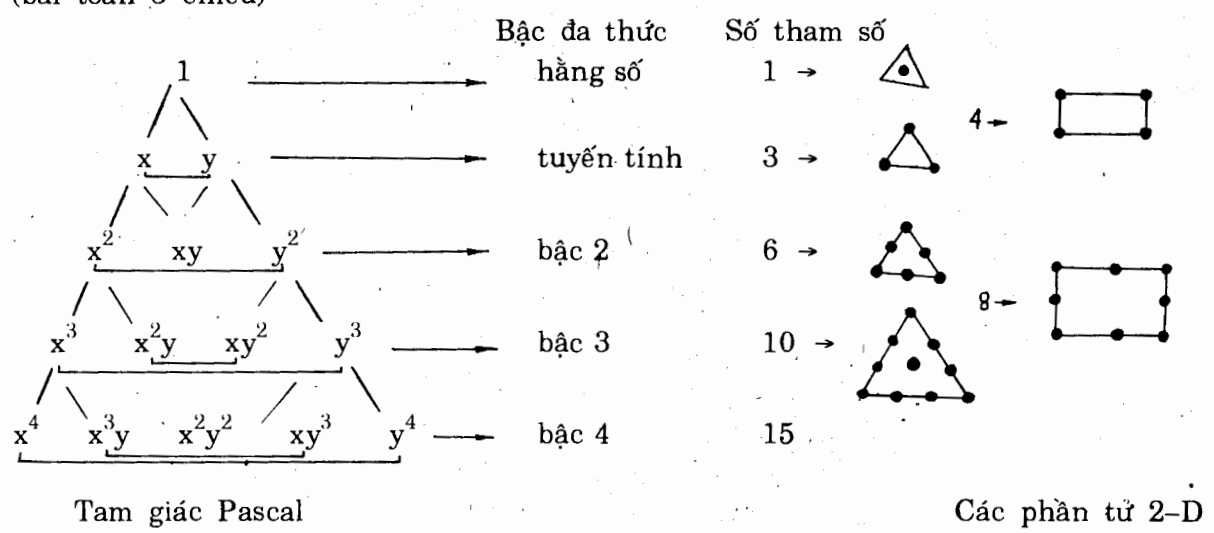
+ Lưới sau được mịn hơn trên cơ sở lưới trước, các điểm nút lưới trước cũng có mặt trong tập hợp các nút lưới sau.

+ Các phần tử có kích thước nhỏ hơn trước nhưng dạng hình học vẫn phải như dạng cũ.

+ Dạng đa thức xấp xỉ là không đổi trong quá trình mịn hóa lưới phần tử.
Ví dụ: Hình 2.5



b. Các đa thức xấp xỉ được chọn sao cho không làm mất tính đẳng hướng hình học. Có như vậy các xấp xỉ mới độc lập với hệ tọa độ của phần tử. Muốn vậy dạng các đa thức được chọn từ tam giác Pascal (cho bài toán 2 chiều) hay từ tháp Pascal (bài toán 3 chiều)



c. Số các phần tử của $\{a\}$ tức số tham số của đa thức xấp xỉ phải bằng số bậc tự do của phần tử $\{q\}_e$. Yêu cầu này cho khả năng nội suy đa thức xấp xỉ theo giá trị đại lượng cần tìm tại các điểm nút.

5. Biểu diễn đa thức xấp xỉ theo vectơ các bậc tự do của phần tử . Ma trận các hàm dạng.

Bậc tự do của một nút (nodal degree of freedom) là giá trị (và có thể cần cả giá trị đạo hàm) của hàm (hay đa thức) xấp xỉ tại nút.

Tập hợp tất cả các bậc tự do của các nút trên phần tử được gọi là *vectơ các bậc tự do của phần tử*, ký hiệu: $\{q\}_e$. Hay trong cơ vật rắn thường gọi là *vectơ chuyển vị nút phần tử*. Và các bậc tự do này (hay các chuyển vị nút) là ẩn số của bài toán khi phân tích theo PPPTHH.

Ví dụ, trong bài toán phẳng của dàn hồi, khi dùng phần tử tam giác 3 điểm nút thì mỗi nút phần tử có 2 bậc tự do. Đó là 2 chuyển vị thành phần u và v theo 2 phương x, y của mỗi nút. Vậy tập hợp các chuyển vị của 3 nút là *vectơ chuyển vị nút phần tử*

$$\begin{aligned}\{q\}_e &= \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k\}_e^T \\ &\equiv \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}_e^T\end{aligned}$$

Tóm lại: Nếu phần tử e có r nút và mỗi nút có s bậc tự do thì vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ có số thành phần $n_e = s \times r$.

Trong PPPTHH, các đa thức xấp xỉ được biểu diễn theo vectơ các bậc tự do phần tử $\{q\}_e$, hay người ta nói rằng các đa thức này được *nội suy* theo $\{q\}_e$. Điều này là một trong những tư tưởng cơ bản của phương pháp. Mà thực chất là ta phải bảo đảm các giá trị của đa thức xấp xỉ (hay cả các đạo hàm của nó) tại các điểm nút thuộc phần tử phải đồng nhất bằng các bậc tự do của phần tử.

Tức là: Phải bảo đảm:

$$\begin{Bmatrix} u \text{ (tại nút 1)} \\ u \text{ (tại nút 2)} \\ \dots \dots \dots \\ u \text{ (tại nút } r) \end{Bmatrix} \equiv \{q\}_e \quad (2.1)$$

Điều này dễ thực hiện được, bằng cách, thay tọa độ các nút vào các đa thức xấp xỉ, rồi thực hiện đồng nhất (2.1). Cụ thể:

$$\begin{Bmatrix} u \text{ (tại nút 1)} \\ u \text{ (tại nút 2)} \\ \vdots \\ u \text{ (tại nút } r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x_1, y_1, z_1) \\ u(x_2, y_2, z_2) \\ \vdots \\ u(x_r, y_r, z_r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [P(x_1, y_1, z_1)] \\ [P(x_2, y_2, z_2)] \\ \vdots \\ [P(x_r, y_r, z_r)] \end{Bmatrix} \{a\} = [A] \{q\} \equiv \{q\}_e \quad (2.2)$$

Trong đó: $[A]$ là ma trận vuông ($n_e \times n_e$) và chỉ chứa tọa độ các điểm nút phần tử.

Từ đó suy ra:

$$\{a\} = [A]^{-1} \{q\}_e \quad (2.3)$$

Thay $\{a\}$ từ (2.3) vào (2.1) ta có:

$$\{u(x,y,z)\} = [P(x,y,z)] \{a\} = [P(x,y,z)] [A]^{-1} \{q\}_e$$

$$\text{Hay: } \{u(x,y,z)\}_e = [N] \{q\}_e \quad (2.4)$$

$$\text{Trong đó: } [N] = [P(x,y,z)] [A]^{-1} \quad (2.5)$$

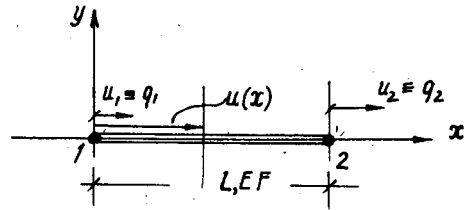
và được gọi là *ma trận các hàm nội suy*, hay *ma trận các hàm dạng*.

Còn qua (2.4), ta nói rằng ta đã biểu diễn (hay nội suy) đa thức xấp xỉ theo vectơ các bậc tự do của phần tử (hay theo vectơ chuyển vị nút phần tử) $\{q\}_e$

Trong bài toán cơ vật rắn hay trong cơ kết cấu có thể dễ thấy rằng các hàm thành phần trong ma trận các hàm dạng $[N]$ phản ánh dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử ứng với các chuyển vị nút bằng đơn vị.

Ví dụ 1: Tìm ma trận hàm dạng của phần tử thanh lăng trụ chịu kéo - nén dọc trục. (Hình 2-6).

Đây là bài toán 1-D. Mọi điểm chỉ tồn tại chuyển vị và biến dạng dọc trục; cụ thể là $u(x)$ và ϵ_x . Chú ý rằng trong phiếm hàm thế năng Π sẽ chứa đạo hàm bậc nhất của chuyển vị vì



Hình 2.6- Phần tử thanh chịu biến dạng dọc trục

$$U = \frac{1}{2} \int_L \frac{N^2}{EJ} dx = \frac{1}{2} \int_L EJ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$$

Nên đa thức xấp xỉ $u(x)$ chỉ đòi hỏi tồn tại đạo hàm bậc nhất, hay có thể lấy $u(x)$ là hàm xấp xỉ tuyến tính:

$$u(x) = a_1 + a_2 x \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$= [1 \ x] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [P(x)] \{a\}.$$

Do $\{a\}$ chỉ có 2 tham số nên vectơ chuyển vị nút $\{q\}_e$ của phần tử cũng chỉ có 2 bậc tự do: đó là 2 chuyển vị dọc trục x của 2 điểm nút đầu và cuối của phần tử. Hay; Vectơ chuyển vị nút phần tử là như sau:

$$\{q\}_e = \{q_1, q_2\}_e^T \equiv \{u_1, u_2\}_e^T$$

Điều này cũng phù hợp với yêu cầu bảo đảm tương thích về biến dạng của bài toán kết cấu đang xét.

Thực hiện đồng nhất (2.2):

$$\begin{Bmatrix} u(\text{tại nút 1}) \\ u(\text{tại nút 2}) \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} u(x=0) \\ u(x=L) \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_1 + a_2 L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e$$

$$\text{Vậy: } [A] = \begin{bmatrix} [P(x_1)] \\ [P(x_2)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}$$

$$\text{Để thấy: } [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

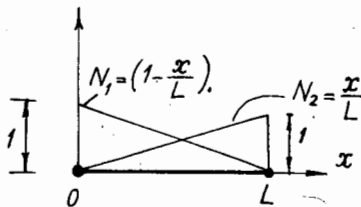
Và theo (2.5), ta có ma trận các hàm dạng

$$\begin{aligned} [N]_e &= [P(x)] [A]^{-1} = [1 \ x] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \ \frac{x}{L} \right] \\ (1 \times 2) \quad (1 \times 2) \quad (2 \times 2) & \quad \quad \quad (2.6) \\ &= [N_1(x) \ N_2(x)] \end{aligned}$$

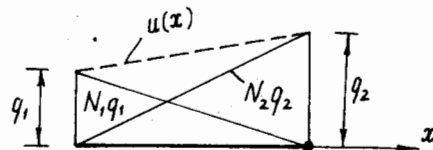
Cuối cùng đã có thể biểu diễn đa thức xấp xỉ chuyển vị dọc trục theo các chuyển vị nút phần tử:

$$u(x) = [N] \{q\}_e = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \ \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e$$

$$\text{Hay} \quad u(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x) q_i = \left(1 - \frac{x}{L}\right) q_1 + \frac{x}{L} q_2$$



Biểu đồ N_1, N_2



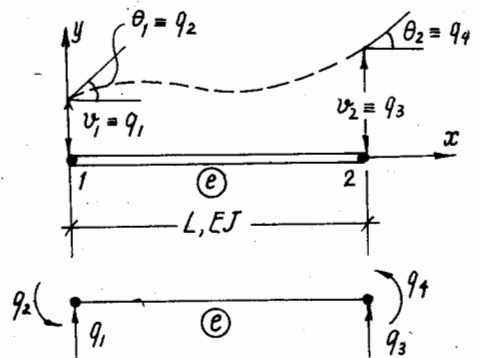
Biểu đồ của $u(x)$.

Các hàm $N_i(x)$ trong (2.6) còn có tên là các hàm nội suy Lagrange bậc 1 có đồ thị như trên.

Ví dụ 2: Chọn đa thức xấp xỉ và ma trận hàm dạng phân tử dầm 2 điểm nút chịu uốn. (Hình 2.7)

Bỏ qua biến dạng dọc trục, dễ thấy rằng khi phần tử dầm chịu uốn, trạng thái chuyển vị của điểm bất kỳ có tọa độ x được đặc trưng bởi chuyển vị $v(x)$ theo phương vuông góc trục dầm.

Để bảo đảm sự tương thích về biến dạng giữa phần tử đang xét và các phần tử kề bên, rõ ràng tại biên



Hình 2.7- Phần tử dầm

phần tử (tại 2 nút) cần bảo đảm sự liên tục với các phần tử kề bên về chuyển vị v và góc xoay $\theta = \frac{dv}{dx}$

Vậy số bậc tự do của phần tử là bốn. Đó là các chuyển vị và góc xoay tại 2 nút

$$\begin{aligned}\{q\}_e &= \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}_e^T \\ &\equiv \{q_1, q_2, q_3, q_4\}_e^T\end{aligned}\quad (a)$$

Để nội suy hàm xấp xỉ $v(x)$, vectơ tham số (vectơ các tọa độ tổng quát) $\{q\}_e$ cũng phải có 4 tham số. Do đó $v(x)$ phải là một đa thức bậc ba, và có dạng:

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

Và do vậy, góc xoay $\theta(x)$ của một mặt cắt ngang bất kỳ là:

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

Thực hiện đồng nhất (a):

$$q_1 \equiv v_1 = v \Big|_{x=0} = a_1$$

$$q_2 \equiv \theta_1 = \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = a_2$$

$$q_3 \equiv v_2 = v \Big|_{x=L} = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3$$

$$q_4 \equiv \theta_2 = \frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

Ở dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{hay} \quad \{q\}_e = [A] \{a\}$$

Với:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \text{ có nghịch đảo } [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix}$$

Sử dụng (2.5), ta có ma trận hàm dạng

$$[N] = [P(x)] [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

trong đó: $N_1 = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}$

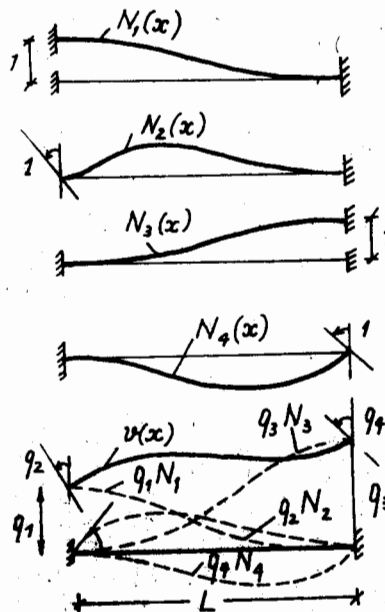
$$N_2 = x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.7)$$

$$N_3 = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

Và như vậy hàm chuyển vị $v(x)$ của phần tử dầm chịu uốn là

$$v(x) = [N] \{q\}_e = \sum_{i=1}^4 N_i q_i \quad (2.8)$$



Hình 2.8- Đồ thị các hàm dạng và xấp xỉ của độ võng

Đồ thị biểu diễn các hàm $N_i(x)$ và $v(x)$ như tổ hợp tuyến tính của các hàm N_i ở hình 2.8.

Các hàm N_i trong (2.7) còn có tên là các hàm nội suy Hecmit bậc 3.

§2-4. Các phương trình cơ bản.

Bài này nhằm cụ thể hơn vào bài toán cơ vật rắn, bài toán kết cấu được giải theo PPPTHH với mô hình tương thích.

1- Chuyển vị, biến dạng và ứng suất trong phần tử- Ma trận độ cứng phần tử và vectơ tải phần tử

Khi giải bài toán theo mô hình tương thích (còn gọi là phương pháp chuyển vị) đại lượng cơ bản cần tìm trước tiên là chuyển vị. Chuyển vị được xấp xỉ hóa và nội suy theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$. Sau khi tìm được ma trận các hàm dạng, chúng ta biểu diễn được trường chuyển vị theo các chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$.

$$\{u\}_e = [N]\{q\}_e \quad (2.9)$$

Từ đó, theo các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng (các phương trình Cauchy), biến dạng của một điểm trong phần tử sẽ là:

$$\{\varepsilon\}_e = [v]\{u\}_e = [v][N]\{q\}_e = [B]\{q\}_e \quad (2.10)$$

$$\text{Trong đó } [B] = [v][N] \quad (2.11)$$

và $[B]$ được gọi là: Ma trận tính biến dạng

Ứng suất tại một điểm thuộc phần tử, trong trường hợp vật liệu tuân theo định luật Hooke sẽ là:

$$\{\sigma\}_e = [D](\{\varepsilon\}_e - \{\varepsilon^0\}_e) + \{\sigma^0\}_e \quad (2.12)$$

trong đó $\{\varepsilon^0\}_e$ và $\{\sigma^0\}_e$ lần lượt là biến dạng và ứng suất ban đầu của phần tử.

Sử dụng (2.10); ta có:

$$\{\sigma\}_e = [D][B]\{q\}_e - [D]\{\varepsilon^0\}_e + \{\sigma^0\}_e$$

$$\text{Hay } \{\sigma\}_e = [T]\{q\}_e - [D]\{\varepsilon^0\}_e + \{\sigma^0\}_e \quad (2.13)$$

$$\text{trong đó } [T] = [D][B] \text{ gọi là ma trận tính ứng suất phần tử.} \quad (2.14)$$

(2.9), (2.10) và (2.13) cho ta biểu diễn chuyển vị, biến dạng và ứng suất trong phần tử theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$

Thế năng toàn phần của phần tử:

$$\Pi_e(\{u\}_e) = \int_{V_e} \frac{1}{2} \{\varepsilon\}_e^T \{\sigma\}_e dV - \int_{V_e} \{g\}^T \{u\}_e dV - \int_{S_e} \{p\}^T \{u\}_e dS$$

Dùng (2.9), (2.10) và (2.13):

$$\Pi_e(\{q\}_e) = \int_{V_e} \frac{1}{2} \{q\}_e^T ([B]^T [D] [B]) \{q\}_e dV -$$

$$\left(\int_V \{g\}^T \{u\}_e dV + \int_{S_e} \{p\}^T \{u\}_e dS + \int_V \frac{1}{2} \{\epsilon^0\}_e^T [D] [B] dV - \int_V \frac{1}{2} \{\sigma^0\}_e^T [B] dV \right) \{q\}_e$$

$$\text{Hay } \Pi_e(\{q\}_e) = \frac{1}{2} \{q\}_e^T [K]_e \{q\}_e - \{q\}_e^T \{P\}_e \quad (2.15)$$

$$\text{Trong đó: } [K]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad \text{Ma trận cứng phần tử} \quad (2.16)$$

$$\{P\}_e = \int_V [N]^T \{g\}_e dV + \int_{S_e} [N]^T \{p\}_e dS + \int_V \frac{1}{2} [B]^T [D] \{\epsilon^0\}_e dV - \int_V \frac{1}{2} [B]^T \{\sigma^0\}_e dV$$

$$\{P\}_e \text{ được gọi là vectơ tải phần tử.} \quad (2.17)$$

Để thấy rằng vì $[D]$ là ma trận đối xứng nên tích $[B]^T [D] [B]$ cũng đối xứng và do đó $[K]_e$ là ma trận đối xứng.

2- Ghép nối các phần tử - ma trận cứng và vectơ tải tổng thể.

Giả sử vật thể (miền V) được chia thành NE phần tử (miền con V_e) bởi R điểm nút. Nếu mỗi nút có s bậc tự do thì số bậc tự do của cả hệ là $n = R \times s$.

(1) Gọi $\{q\}$ là vectơ chuyển vị nút tổng thể (hay vectơ chuyển vị nút kết cấu)

(2) Nó sẽ là tập hợp của tất cả các bậc tự do của tất cả các nút của hệ và gồm n thành phần.

Giả sử mỗi phần tử có r nút, thì số bậc tự do của mỗi phần tử là $n_e = r \times s$. Và vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ gồm tất cả các bậc tự do của r nút của phần tử tức là gồm n_e thành phần.

Rõ ràng, theo mô hình tương thích, các thành phần này của $\{q\}_e$ là nằm trong số các thành phần của $\{q\}$. Và do đó sự liên hệ giữa 2 vectơ này có thể được biểu diễn như sau:

$$\{q\}_e = [L]_e \{q\} \quad (2.18)$$

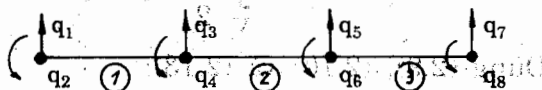
$$(n_e \times 1) \quad (n_e \times n) \quad (n \times 1)$$

Trong đó $[L]_e$ là ma trận định vị của phần tử, có kích thước $(n_e \times n)$.

Ma trận này cho thấy hình ảnh sắp xếp các thành phần của vectơ $\{q\}_e$ trong $\{q\}$.

Ví dụ: Dầm với bốn điểm nút như hình 2.9 có vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{q\}$ là:

$$\{q\} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_8\}^T$$



Hình 2.9- Các bậc tự do của dầm có bốn nút

$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = [L]_1 \{\bar{q}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_8 \end{Bmatrix} = \{\bar{q}\}_1$$

$$\{q\}_2 = \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = [L]_2 \{\bar{q}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_8 \end{Bmatrix} = \{\bar{q}\}_2$$

$$\{q\}_3 = \begin{Bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} = [L]_3 \{\bar{q}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_8 \end{Bmatrix} = \{\bar{q}\}_3$$

Ở bài (2-4) ta đã có công thức xác định thế năng toàn phần Π_e của một phần tử. Vậy thế năng toàn phần của toàn hệ là, sử dụng (2.15) và (2.18)

$$\Pi = \sum_{e=1}^{NE} \Pi_e = \sum_{e=1}^{NE} \left[\frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T [L]_e^T [K]_e [L]_e \{\bar{q}\} - \{P\}_e^T [L]_e \{\bar{q}\} \right]$$

Biểu thức này biểu diễn thế năng toàn phần Π của hệ theo vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{\bar{q}\}$. Áp dụng nguyên lý thế năng toàn phần dừng (nguyên lý Lagrange) ta sẽ có điều kiện cân bằng của toàn hệ tại các điểm nút.

Cụ thể:

$$\delta \Pi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0 \end{cases} \quad \text{hay ở dạng ma trận:} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \{\bar{q}\}} = \{0\}$$

Và ta có: $\frac{\partial \Pi}{\partial \{\bar{q}\}} = \begin{pmatrix} \sum_{e=1}^{NE} [L]_e^T [K]_e [L]_e \end{pmatrix} \{\bar{q}\} - \sum_{e=1}^{NE} [L]_e^T \{P\}_e = \{0\}$

Hay, ta nhận được hệ phương trình:

$$[\bar{K}]\{\bar{q}\} - \{\bar{P}\} = \{0\} \quad (2.19)$$

Trong đó: $[\bar{K}] = \sum_{e=1}^{NE} [L]_e^T [K]_e [L]_e$ là ma trận cứng tổng thể (kết cấu) $\{\bar{P}\} = \sum_{e=1}^{NE} [L]_e^T \{P\}_e$ là vectơ tải tổng thể (kết cấu) $\{\bar{q}\}$ là vectơ chuyển vị tổng thể (kết cấu)

$$\{\bar{P}\} = \sum_{e=1}^{NE} [L]_e^T \{P\}_e \text{ là vectơ tải tổng thể (kết cấu)} \quad (2.21)$$

Chú ý:

1. Về mặt cơ học, hệ phương trình.

$$[K]\{q\} - \{P\} = \{0\}$$

biểu diễn điều kiện cân bằng của vật thể tại các điểm nút. Phần tử $\bar{K}_{ij}$ của ma trận cứng tổng thể $[K]$ biểu thị lực sinh ra ở nút i do chuyển dịch đơn vị ở nút j khi tất cả các nút bị gắn cứng.

Còn các thành phần $\bar{P}_i$ của vectơ tải tổng thể $\{P\}$ là ngoại lực tác động lên các phần tử (tính đến cả biến dạng và ứng suất ban đầu) được quy đổi về tương ứng với bậc tự do thứ i .

Trường hợp hệ thanh, còn phải kể thêm vào $\{P\}$, các ngoại lực tập trung tác động lên các nút theo các bậc tự do tương ứng mà tập hợp các thành phần này là vectơ tải trọng nút $\{P\}_n$.

2. Khi thiết lập phương trình trên ta chưa đưa vào các điều kiện biên động học, vật thể xem như tự do, ma trận $[K]$ là suy biến (không tồn tại nghịch đảo $[K]^{-1}$). Do vậy ta phải đưa vào các điều kiện biên động học để, như cách nói trong cơ kết cấu, hệ là bất biến hình. Sau khi áp đặt điều kiện biên động học, phương trình (2.19) trở thành:

$$[K^*]\{q^*\} = \{P^*\} \quad (2.22)$$

3. Việc sử dụng ma trận định vị phần tử $[L]_e$ trong (2.20) và (2.21) để tính ma trận cứng kết cấu $[K]$ và vectơ tải kết cấu $\{P\}$ thực chất là sắp xếp các phần tử của ma trận cứng phần tử $[K]_e$ và của vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ vào vị trí của nó trong ma trận cứng tổng thể $[K]$ và vectơ tải tổng thể $\{P\}$. Tuy nhiên trong thực hành người ta sử dụng ma trận liên hệ Boolean (hay ma trận chỉ số) tiện hơn nhiều trong quá trình ghép nối các phần tử để có được $[K]$ và $\{P\}$

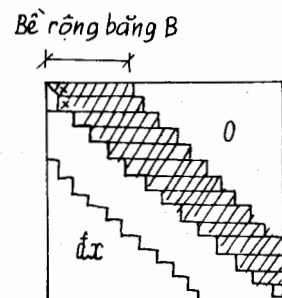
4. + Do $[K]_e$ đối xứng nên ma trận cứng tổng thể $[K]$ cũng là ma trận đối xứng.

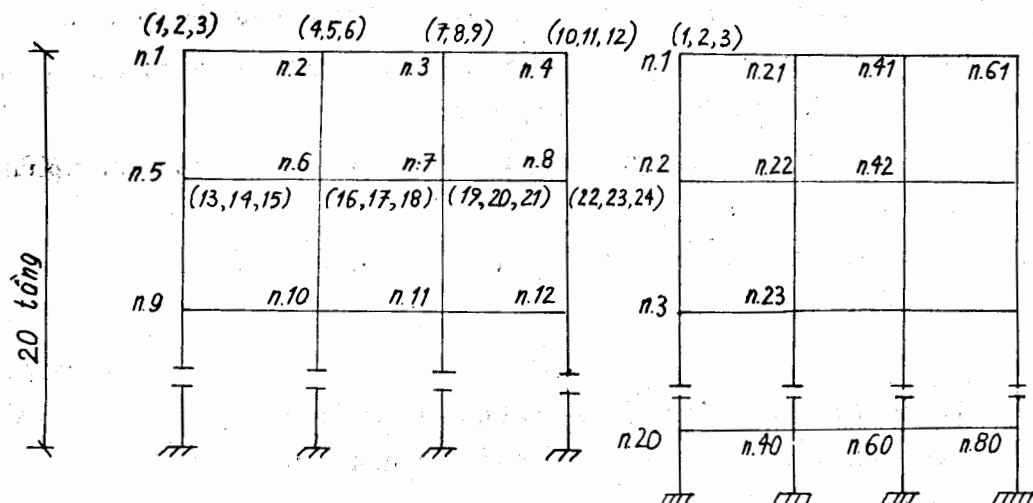
+ Ngoài ra $[K]$ có dạng băng.

+ Bề rộng băng tùy thuộc cách đánh số nút (hay cách đánh số bậc tự do)

Ví dụ: Xét một khung phẳng nhà 20 tầng, 3 nhịp (h.vẽ). Nếu không kể tới 4 nút đã ngàm cứng ở dưới thì hệ gồm 80 nút, mỗi nút có 3 chuyển vị (bậc tự do) chưa biết $\rightarrow$ số ẩn của hệ là: $80 \times 3 = 240$, ma trận $[K^*]$ gồm $240^2 = 57.600$ thành phần.

Tuy nhiên, theo ý nghĩa cơ học của $\bar{K}_{ij}$, rõ ràng $\bar{K}_{ij} \neq 0$ chỉ nếu i và j là các bậc tự do thuộc cùng 1 nút hoặc 2 nút kề sát nhau. Còn lại





(a) Cách đánh số nút theo chiều ngắn: $B = 15$

(b) Đánh số nút theo chiều dài: $B = 63$

là bằng 0.

Ví dụ: $\bar{K}_{1,15} \neq 0$ nhưng $\bar{K}_{1,7} = \bar{K}_{1,16} = 0$

Từ đó có thể tính chiều rộng băng B (thực ra phải gọi là nửa chiều rộng băng)

$$B = (D + 1) \times s \quad (2.23)$$

Trong đó: D là sự sai khác lớn nhất của mã số 2 nút kề sát nhau

s : số bậc tự do của một nút.

Với cách đánh số nút theo chiều ngắn (hình (a)): $B = (4 + 1) \times 3 = 15$

Với cách đánh số nút theo chiều dài (hình (b)): $B = (20 + 1) \times 3 = 63$

Vậy trong thí dụ này, cách đánh số theo chiều ngắn sẽ cho bề rộng băng B nhỏ nhất. Và điều này có lợi cho việc lưu trữ ma trận hệ số và việc giải hệ phương trình đại số.

3- Phép chuyển trục tọa độ.

Như ở các phần trên ta thấy rằng các đại lượng chuyển vị, biến dạng, và ứng suất và cả ma trận hàm dạng $[N]$, ma trận cứng phần tử $[K]_e$, vector tải phần tử $\{P\}_e$ là được xây dựng trong hệ tọa độ thích hợp của mỗi phần tử. Hệ này thường chọn sao cho việc thiết lập các công thức cần có là đơn giản và hệ tọa độ này được gọi là *hệ tọa độ địa phương* (local coordinate system). Khi một hệ tọa độ địa phương được sử dụng thì phương của các bậc tự do của phần tử cũng phải được lấy theo hệ tọa độ này.

Tuy nhiên, trong thực tế, thường gặp các kết cấu mà các phần tử khác nhau thì có các hệ tọa độ địa phương khác nhau và do đó các bậc tự do của phần tử cũng khác nhau về phương.

Do vậy cần thiết có hệ tọa độ chung cho toàn hệ và gọi là *hệ tọa độ tổng thể* (hay *hệ tọa độ chung* hay *hệ tọa độ kết cấu* – global coordinate system). Việc chọn hệ tọa độ này là tùy ý tuy nhiên trong thực tế thường lấy nó như hệ trục để vẽ và biểu diễn hệ.

Nếu gọi hệ tọa độ địa phương là xyz và hệ tọa độ chung tổng thể là $x'y'z'$

Gọi $\{q\}_e$, $\{P\}_e$ và $[K]_e$ lần lượt là vectơ chuyển vị nút phần tử, vectơ tải và ma trận cứng phần tử trong hệ tọa độ địa phương xyz

Còn $\{q'\}_e$, $\{P'\}_e$ và $[K']_e$ là vectơ chuyển vị nút, vectơ tải và ma trận cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$

Ta có thể thiết lập mối quan hệ biểu diễn $\{q\}_e$ và $\{P\}_e$ theo $\{q'\}_e$ và $\{P'\}_e$

$$\{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e \quad (2.24)$$

$$\{P\}_e = [T]_e \{P'\}_e \quad (2.25)$$

với $[T]_e$ gọi là ma trận biến đổi (transformation matrix) các thành phần chuyển vị nút từ hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$ về hệ tọa độ địa phương xyz .

Khi đó, thế năng toàn phần Π_e của phần tử đang là:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{q\}_e^T [K]_e \{q\}_e - \{P\}_e^T \{q\}_e$$

sẽ trở thành, dùng (2.24)

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{q'\}_e^T [T]_e^T [K]_e [T]_e \{q'\}_e - \{P\}_e^T [T]_e \{q'\}_e$$

Hay
$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{q'\}_e^T [K']_e \{q'\}_e - \{P'\}_e^T \{q'\}_e$$

Trong đó: $[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e \quad (2.26)$

$$\{P'\}_e = [T]_e^T \{P\}_e \quad (2.27)$$

Nhận xét: Bằng cách so sánh (2.25) và (2.27) dễ dàng thấy rằng

$$[T]_e^T [T]_e = [I] \quad ([I] \text{ là ma trận đơn vị})$$

Và khi $[T]_e$ là ma trận vuông thì từ đây suy ra:

$$[T]_e^T = [T]_e^{-1} \text{ hay } [T]_e \text{ là ma trận trực giao}$$

Sau khi xoay trục, biểu thức thế năng toàn phần của toàn hệ sẽ được biểu diễn theo vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{q'\}$ chứa tất cả các bậc tự do (các chuyển vị thành phần) của tất cả các nút thuộc hệ trong hệ tọa độ tổng quát $x'y'z'$. (Nói cách khác việc ghép nối các phần tử hoàn toàn thực hiện được tương tự như đã nói trên). Rồi áp dụng nguyên lý thế năng toàn phần dừng cho toàn hệ, ta thiết lập được phương trình cho toàn hệ:

$$[\overline{K'}] \{q'\} = \{P'\} \quad (2.28)$$

Trong đó: $[\overline{K'}] = \sum_{e=1}^{NE} [K']_e$: Ma trận cứng tổng thể trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$

$$\{P'\} = \sum \{P'\}_e + \{P'\}_n$$

: vectơ tải tổng thể trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$
 $\{q'\}$: vectơ chuyển vị nút tổng thể trong hệ tọa độ tổng thể.

Ở đây số hạng thứ hai $\{\bar{P}'\}_n$ trong biểu thức xác định $\{\bar{P}'\}$ là vectơ tải trọng tập trung đặt tại các nút tác dụng theo các phương tương ứng của các thành phần trong vectơ chuyển vị nút kết cấu $\{\bar{q}'\}$ và thường được gọi là vectơ tải trọng nút (nodal load vector)

4 - Ghép nối phần tử hay sử dụng ma trận chỉ số để xây dựng ma trận cứng và vectơ tải tổng thể.

Trong PPPTHH người ta sử dụng 2 hệ thống chỉ số để đánh số cho các bậc tự do của các nút. Đó là.

1. *Hệ thống chỉ số tổng thể*: Có được bằng cách đánh số các bậc tự do của toàn kết cấu. Hệ thống chỉ số tổng thể để chỉ thứ tự các bậc tự do trong tập hợp tất cả các bậc tự do của toàn hệ, tức thứ tự của bậc tự do đang xét trong $\{q\}$ (hoặc $\{q'\}$). Hệ thống này được đánh thứ tự từ 1, 2, 3... $n = R \times s$.

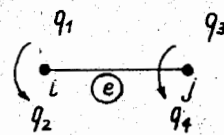
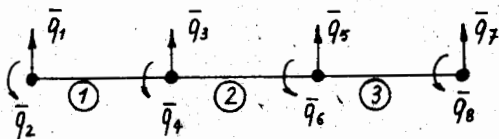
2. *Hệ thống chỉ số phần tử*: để chỉ thứ tự các bậc tự do trong phần tử hay thứ tự của các bậc tự do trong $\{q\}_e$ (hoặc $\{q'\}_e$): Được đánh số từ 1, 2, 3, ... $n_e = r \times s$ (Trong đó R: số nút của cả hệ; r số nút của phần tử, s: số bậc tự do của 1 nút.)

Ví dụ:

Để xác định sự tương ứng của mỗi phần tử thuộc $\{q\}_e$ trong $\{q\}$ (hoặc $\{q'\}_e$ trong $\{q'\}$ người ta lập *ma trận chỉ số* $[b]$ (còn gọi là ma trận liên hệ Boolean) mà giá trị của mỗi thành phần b_{ij} chính là chỉ số tổng thể tương ứng bậc tự do thứ j của phần tử thứ i.

Ma trận chỉ số $[b]$ có số hàng bằng số phần tử của hệ, số cột bằng số bậc tự do của một phần tử.

Ví dụ: Ở ví dụ trên thì $[b]$ có kích thước (3×4) . Và $b_{23} = 5$, $b_{32} = 6$



Hệ thống chỉ số tổng thể: 1, 2, 3, ..., 8.

Hệ thống chỉ số phần tử: 1, 2, 3, 4.

Khi sử dụng ma trận chỉ số $[b]$ để xây dựng ma trận cứng tổng thể $[K]$ và vectơ

Phân tử \ Chỉ số cục bộ	Nút i		Nút j	
	1	2	3	4
(1)	1	2	3	4
(2)	3	4	5	6
(3)	5	6	7	8

hay $[b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$
(3×4)

tổng thể $\{\bar{P}\}$ (hoặc $\{\bar{K}'\}$ và $\{\bar{P}'\}$) ta chỉ cần nhớ rằng mỗi thành phần K_{ij}^e của ma trận cứng phần tử $[K]_e$ sẽ phải "gộp thêm" vào phần tử $\bar{K}_{mn}$ của ma trận cứng tổng thể $\bar{[K]}$ với $m = b_{ei}$ và $n = b_{ej}$ (nhớ là b_{ei} , b_{ej} là các giá trị của phần tử hàng i và cột j của ma trận $[b]$). Tương tự, mỗi phần tử P_i^e của vectơ $\{P\}_e$ sẽ được "gộp thêm" vào phần tử $\bar{P}_m$ của $\{\bar{P}\}$ với $m = b_{ei}$.

$$\begin{aligned} \text{Ví dụ: } K_{1,3}^{(2)} &\xrightarrow{\text{gộp thêm}} \bar{K}_{(b_{21}, b_{23})} \equiv \bar{K}_{3,5} \\ K_{2,4}^{(3)} &\Rightarrow \bar{K}_{(b_{32}, b_{34})} \equiv \bar{K}_{6,8} \end{aligned}$$

Để có thể thấy rõ hơn việc sử dụng ma trận chỉ số $[b]$ (còn gọi là ma trận liên hệ Boolean) để xây dựng ma trận cứng tổng thể $\bar{[K]}$ (hoặc $\{\bar{K}'\}$) và vectơ tải tổng thể $\{\bar{P}\}$ (hoặc $\{\bar{P}'\}$) từ các ma trận cứng phần tử $[K]_e$ (hoặc $\{K'_e\}$) và vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ (hoặc $\{P'_e\}$) ta có thể minh họa trên ví dụ vừa xét như sau:

$\{q\}$ là vectơ chuyển vị nút tổng thể gồm tất cả các bậc tự do của tất cả các nút và được đánh số từ 1, 2, 3, ..., 8. Ma trận $\bar{[K]}$ là vuông có kích thước (8×8)

$\{q\}_e$ là vectơ chuyển vị nút phần tử gồm các bậc tự do của phần tử và được đánh số thứ tự từ 1, 2, 3, 4. Ma trận $[K]_e$ là vuông (4×4) .

Từ (2.16) và (2.17) ta có $[K]_e$ và $\{P\}_e$ của mỗi phần tử. Cụ thể:

$$[K]_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ dx & & k_{33}^1 & k_{34}^1 \\ & & & k_{44}^1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \quad [K]_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ dx & & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ & & & k_{44}^2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix} \quad [K]_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 \\ & k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 \\ dx & & k_{33}^3 & k_{34}^3 \\ & & & k_{44}^3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

(Chú ý: Các chỉ số tổng thể tương ứng được viết ở trên và bên cạnh các ma trận $[K]_e$).

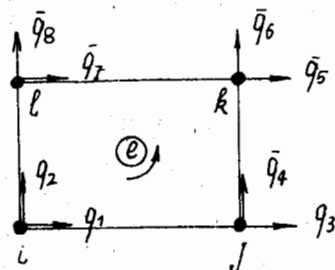
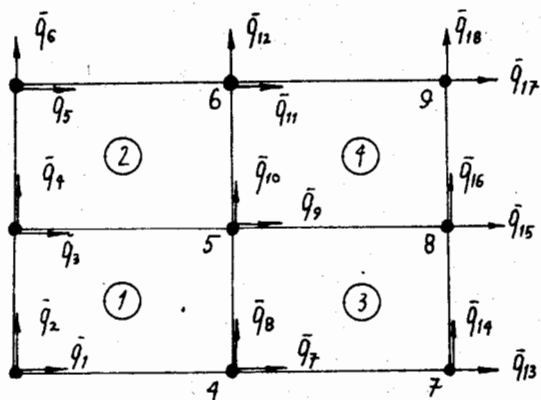
Nếu thay thế chỉ số địa phương (số nhỏ) bằng chỉ số tổng thể tương ứng lấy từ ma trận chỉ số $[b]$, thì có thể thấy được vị trí cần "gộp vào" của mỗi phần tử K_{ij}^e trong $\bar{[K]}$ tổng thể (hình vẽ). Cũng tương tự vậy với $\{\bar{P}\}$

$$\{P\}_1 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 \\ P_4^1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}, \quad \{P\}_2 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_4^2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}, \quad \{P\}_3 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} P_1^3 \\ P_2^3 \\ P_3^3 \\ P_4^3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

(Chú ý: Các chỉ số tổng thể tương ứng được viết bên cạnh các vectơ $\{P\}_e$).

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{33}^1+k_{11}^2 & k_{34}^1+k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & 0 & 0 \\ & & & k_{44}^1+k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & 0 & 0 \\ & & & & k_{33}^2+k_{11}^3 & k_{34}^2+k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 \\ & & & & & k_{44}^2+k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 \\ & & & & & & k_{33}^3 & k_{34}^3 \\ & & & & & & & k_{44}^3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad \{\bar{p}\} = \begin{bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 + p_1^2 \\ p_4^1 + p_2^2 \\ p_3^2 + p_1^3 \\ p_4^2 + p_2^3 \\ p_3^3 \\ p_4^3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Ví dụ: Lập ma trận chỉ số tám phẳng chữ nhật sau.



Kết cấu và hệ thống chỉ số tổng thể.

Phần tử mẫu và hệ thống chỉ số phần tử.

Chỉ số phần tử	Nút i		Nút j		Nút k		Nút l	
Phần tử	1	2	3	4	5	6	7	8
(1)	1	2	7	8	9	10	3	4
(2)	3	4	9	10	11	12	5	6
(3)	7	8	13	14	15	16	9	10
(4)	9	10	15	16	17	18	11	12

Dễ thấy:

$$K_{5,6}^{(1)} \Rightarrow \bar{K}_{9,10}$$

$$K_{3,4}^{(1)} \Rightarrow \bar{K}_{7,8}$$

$$K_{5,5}^{(1)} \Rightarrow \bar{K}_{9,9}$$

$$K_{2,4}^{(3)} \Rightarrow \bar{K}_{8,14}$$

$$K_{2,6}^{(3)} \Rightarrow \bar{K}_{8,16}$$

Cũng có thể thấy rằng:

$$\bar{K}_{7,8} = K_{3,4}^{(1)} + K_{1,2}^{(3)}$$

$$\bar{K}_{11,12} = K_{5,6}^{(2)} + K_{7,8}^{(4)}$$

$$\bar{K}_{9,10} = K_{5,6}^{(1)} + K_{3,4}^{(2)} + K_{7,8}^{(3)} + K_{1,2}^{(4)}$$

$$\bar{K}_{9,9} = K_{5,5}^{(1)} + K_{3,3}^{(2)} + K_{7,7}^{(3)} + K_{1,1}^{(4)}$$

5- Áp đặt điều kiện biên.

Hệ phương trình tổng thể $\bar{[K]} \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}$ có thể viết lại ở dạng khối như sau.

$$\begin{bmatrix} \bar{[K]}_{11} & \bar{[K]}_{12} \\ \bar{[K]}_{21} & \bar{[K]}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{q}\}_1 \\ \{\bar{q}\}_2^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\bar{P}\}_1^b \\ \{\bar{P}\}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Trong đó $\{\bar{q}\}_2^b$ vectơ chứa tất cả các bậc tự do (chuyển vị nút) đã biết

$\{\bar{q}\}_1$ vectơ chứa các bậc tự do chưa biết (còn lại trong $\{\bar{q}\}$)

thì $\{\bar{P}\}_1^b$ là vectơ tải gồm các phần tử đã biết.

và $\{\bar{P}\}_2$ là vectơ tải gồm các phần tử còn lại của $\{\bar{P}\}$ và là chưa biết.

Và phương trình dạng khối (2.29) có thể phân thành 2 hệ như sau.

$$\begin{cases} \bar{[K]}_{11} \{\bar{q}\}_1 + \bar{[K]}_{12} \{\bar{q}\}_2^b = \{\bar{P}\}_1^b \\ \bar{[K]}_{21} \{\bar{q}\}_1 + \bar{[K]}_{22} \{\bar{q}\}_2^b = \{\bar{P}\}_2 \end{cases}$$

Từ phương trình đầu, vì $\{\bar{q}\}_2^b$ đã biết, nên ta có phương trình xác định $\{\bar{q}\}_1$ là

$$\bar{[K]}_{11} \{\bar{q}\}_1 = \{\bar{P}\}_1^b - \bar{[K]}_{12} \{\bar{q}\}_2^b \quad (2.30)$$

Hay: $\{\bar{q}\}_1 = \bar{[K]}_{11}^{-1} (\{\bar{P}\}_1^b - \bar{[K]}_{12} \{\bar{q}\}_2^b)$

Và từ đó xác định được $\{\bar{P}\}_2$ thì phương trình còn lại:

$$\{\bar{P}\}_2 = \bar{[K]}_{12}^T \{\bar{q}\}_1 + \bar{[K]}_{22} \{\bar{q}\}_2^b \quad (2.31)$$

Trường hợp thường gặp là khi tất cả các bậc tự do (chuyển vị nút) cho trước là bằng 0, thì phương trình tìm $\{\bar{q}\}_1$ chỉ còn

$$\bar{[K]}_{11} \{\bar{q}\}_1 = \{\bar{P}\}_1^b$$

Phương trình này suy ra được một cách đơn giản từ phương trình tổng thể $\bar{[K]} \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}$ bằng cách xóa các hàng và cột tương ứng với các bậc tự do tương ứng trong $\{\bar{q}\}_1^b$ và có giá trị bằng không.

Chương 3

Tính toán hệ thanh

Phương pháp phân tích bài toán hệ thanh theo PPPTHH với mô hình tương thích cũng không nằm ngoài các bước đi chung đã nói. Vấn đề còn lại là tùy thuộc đặc tính của từng loại bài toán mà áp dụng. Trước hết cần thấy rằng bài toán hệ thanh thuộc loại bài toán một chiều khi mà các thành phần chuyển vị của các phần tử chỉ là hàm của một biến tọa độ x .

§3-1. HỆ THANH DÀN.

Như đã biết dàn là một hệ gồm các thanh chỉ chịu kéo nén đúng tâm hay là một trường hợp cụ thể của thanh chỉ chịu biến dạng dọc trục. Vậy, trước tiên ta bàn đến thanh chịu biến dạng dọc trục.

1- Phần tử thanh chịu biến dạng dọc trục:

Xét một phần tử thanh có 2 điểm nút chịu biến dạng dọc trục, chịu tải trọng phân bố dọc trục $p(x)$ như hình 3.1.

Rõ ràng phần tử chỉ có 2 bậc tự do là 2 chuyển vị của 2 nút đầu và cuối.

Do đó chuyển vị dọc trục $u(x)$ của phần tử chỉ có thể là một xấp xỉ tuyến tính.

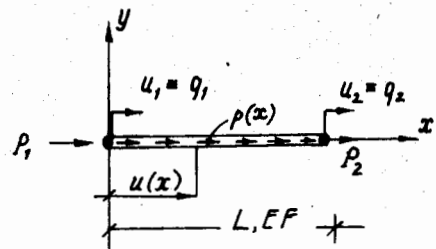
$$u(x) = a_1 + a_2 x$$

Hay $u(x) = [N] \{q\}_e$

Trong đó: $\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e \equiv \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e$

Và như ở thí dụ chương 2 đã biết

$$[N] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$



Hình 3.1.

Trong bài toán này, vectơ biến dạng $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x\}$, vectơ ứng suất cũng chỉ còn $\{\sigma\} = \{\sigma_x\}$.

Trong phương trình quan hệ chuyển vị biến dạng: $[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \end{bmatrix}$ vì $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$

Trong phương trình định luật Hook, ma trận $[D]$ chỉ còn: $[D] = [E]$ hay $\sigma_x = E \varepsilon_x$ (với E : môđun đàn hồi Young)

Vậy theo (2.11), ma trận tính biến dạng:

$$[B] = [\partial] [N] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

Hay: $[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$

Và ma trận cứng phần tử, theo (2.16).

$$\begin{aligned} [K]_e &= \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \\ &= \int_0^L \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} F dx = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Trong đó F : Diện tích mặt cắt ngang phần tử.

Vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ được tính theo (2.17):

Do lực phân bố dọc trục $p(x)$:

$$\{P\}_e^P = \int_0^L [N]^T \{p(x)\} dx = \int_0^L \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} p(x) dx \quad (3.2)$$

Trường hợp $p(x) = p_0 = \text{const}$:

$$\{P\}_e^P = p_0 \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{p_0 L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Do nhiệt độ: $\{P\}_e^i = \int_{V_e} [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV$

$$= \int_0^L \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \{\alpha T\} F dx = EF \alpha T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Trong đó T : Độ biến thiên nhiệt độ

Để có thể thấy rõ các bước đi và phân tích bài toán theo phương pháp PTHH chúng ta xét kỹ thí dụ dưới đây.

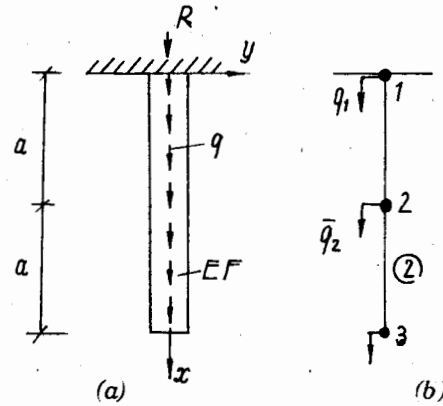
Thí dụ 1: Giải bài toán thanh dưới đây (h. 3.2a) theo PPPTHH với sơ đồ 2 phần tử. Biết chiều dài thanh là $2a$. Độ cứng EF là không đổi. Thanh chịu tải trọng phân bố đều dọc trục, cường độ $q = \text{const}$

Các bước giải:

1. Thực hiện rời rạc hóa vật thể khảo sát bởi việc định rõ các nút, các phần tử. Rồi thực hiện đánh số nút, đánh số phần tử.

Trong bài toán thanh đơn giản này, ta chia thanh thành 2 phần tử (phần tử (1) và (2)) bởi hệ thống 3 điểm nút 1, 2, và 3. (Hình 3.2b)

Sau đó trên sơ đồ kết cấu đã được rời rạc hóa, thiết lập ma trận chỉ số [b]



Hình 3.2. a. Sơ đồ kết cấu
b. Sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa.

Chỉ số cục bộ Phần tử	Nút đầu (Nút i)	Nút cuối (Nút j)
(1)	1	2
(2)	2	3

Hay ma trận [b] là: $[b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Thiết lập các ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ rồi thực hiện ghép nối các phần tử để xây dựng ma trận cứng tổng thể $[K]$.

Nhận xét rằng do 2 phần tử có chiều dài và độ cứng như nhau nên dễ thấy là $[K]_1 = [K]_2$. Cụ thể theo (3.1)

Chỉ số tổng thể của phần tử (1)

$$[K]_1 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ \frac{dx}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Chỉ số tổng thể của phần tử (2)

$$[K]_2 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ \frac{dx}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Thực hiện ghép nối các phần tử;

$$[\bar{K}] = \frac{EF}{a} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ dx \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1+1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \text{Chỉ số tổng thể} \\ \text{toàn kết cấu} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow [\bar{K}] = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ dx & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Thiết lập các vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ rồi thực hiện ghép nối các phần tử để xây dựng vectơ tải tổng thể $\{\bar{P}\}$

Để thấy trong bài toán này $\{P\}_1 = \{P\}_2$. Và theo (3.4)

$$\{P\}_1 = \frac{qa}{2} \begin{matrix} \text{Chỉ số tổng thể} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}; \quad \{P\}_2 = \frac{qa}{2} \begin{matrix} \text{Chỉ số tổng thể} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Thực hiện ghép nối, với chú ý là do tại các nút 2 và 3 không có tải trọng tập trung cho trước, còn tại nút 1 có phân lực R. Nên vectơ tải trọng nút $\{\bar{P}\}_n$ là:

$$\{\bar{P}\}_n = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Và khi đó vectơ tải tổng thể:

$$\{\bar{P}\} = \frac{qa}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qa}{2} + R \\ qa \\ \frac{qa}{2} \end{Bmatrix}$$

Vậy ta có hệ phương trình $[\bar{K}]\{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}$ như sau:

$$\frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ dx & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qa}{2} + R \\ qa \\ \frac{qa}{2} \end{Bmatrix}$$

4. Áp đặt điều kiện biên: Rõ ràng theo sơ đồ kết cấu đã cho thì chuyển vị của nút 1 là bằng 0, Hay $\bar{q}_1 = 0$. Vậy hệ thống phương trình để giải sẽ nhận được bằng cách "nôm na" là "xóa đi" các hàng và cột tương ứng $\bar{q}_1 = 0$, tức là "xóa" hàng 1, cột 1 của hệ phương trình trên.

Cuối cùng ta có: $[\bar{K}^*]\{\bar{q}^*\} = \{\bar{P}^*\}$ như sau:

$$\frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \frac{qa}{2} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

5. Giải hệ phương trình này ta tìm được các chuyển vị nút $\bar{q}_2$ và $\bar{q}_3$, cụ thể là

$$\{\bar{q}^*\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{2EF} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Và như vậy tất cả các chuyển vị nút là đã biết, cụ thể

$$\{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{2EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Từ đó vectơ chuyển vị nút $\{q\}_e$ của mỗi phần tử cũng hoàn toàn xác định

Cụ thể:

$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{2EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$\{q\}_2 = \begin{Bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{2EF} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Và biểu đồ chuyển vị của mỗi phần tử cũng hoàn toàn xác định như sau:

$$u_1(x) = [N] \{q\}_1 = N_1(x) \cdot \bar{q}_1 + N_2(x) \cdot \bar{q}_2$$

$$u_2(x) = [N] \{q\}_2 = N_1(x) \bar{q}_2 + N_2(x) \bar{q}_3$$

Kết quả cho trên hình 3.3 a và 3.3b

6. Xác định nội lực trong các phần tử: Do hàm chuyển vị là tuyến tính nên dễ thấy rằng biến dạng dọc trục $\epsilon_x = \frac{du}{dx}$ = hằng số trên từng phần tử.

Do đó ứng suất $\sigma_x = E \epsilon_x = \text{const}$ và, lực dọc $N_e = F \sigma_x = EF \epsilon_x$ cũng là không đổi trên suốt chiều dài mỗi phần tử. Và

$$N_e = EF \epsilon_x = EF [B] \{q\}_e$$

Cụ thể, lực dọc trong phần tử (1) và phần tử (2):

$$N_1 = EF [B] \{q\}_1 = EF \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3qa^2}{2EF} \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} qa$$

$$N_2 = EF [B] \{q\}_2 = EF \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{3qa^2}{2EF} \\ \frac{4qa^2}{2EF} \end{Bmatrix} = \frac{qa}{2}$$

Kết quả này được thể hiện trên biểu đồ lực dọc (N) ở hình 3.3c.

Để thấy rõ hơn bản chất của PPPTHH thông qua thí dụ này, ta thử tìm lời giải chính xác của bài toán.

Như trong Giáo trình Sức bền vật liệu đã biết, nếu sử dụng phương trình cân bằng biểu diễn qua chuyển vị dọc trục $u(x)$ ta sẽ nhận được phương trình vi phân chủ đạo của bài toán thanh chịu biến dạng dọc trục, trong trường hợp tổng quát, có dạng:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(EF \frac{du}{dx} \right) + q(x) = 0 \\ \text{và các điều kiện biên} \end{cases}$$

trong đó $q(x)$ là cường độ tải trọng phân bố dọc trục thanh.

Với bài toán đang khảo sát: $EF = \text{const}$, $q(x) = q = \text{const}$, phương trình vi phân và các điều kiện biên của bài toán là:

$$EF \frac{d^2 u}{dx^2} + q = 0 \quad (0 < x < 2a) \quad (a)$$

$$\text{Điều kiện biên: } u \Big|_{x=0} = 0, \quad (b)$$

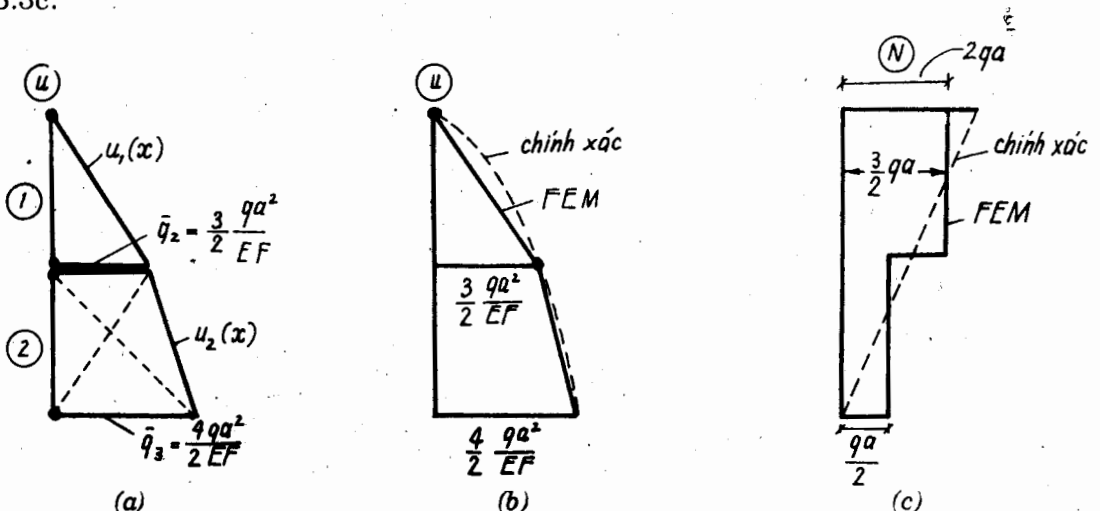
$$N \Big|_{x=2a} = \left(EF \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=2a} = 0$$

Sử dụng phương pháp tích phân trực tiếp phương trình vi phân (a) và sử dụng các điều kiện biên (b) để xác định các hằng số tích phân. Dễ dàng nhận được kết quả chính xác của bài toán là:

$$\text{Hàm chuyển vị: } u(x) = \frac{q}{2EF} (4ax - x^2) \quad (0 \leq x \leq 2a)$$

$$\text{Lực dọc } N = EF \frac{du}{dx} = qa \left(2 - \frac{x}{a} \right)$$

Biểu đồ chuyển vị (u) được biểu diễn bằng đường chấm chấm trong hình 3.3 b. Biểu đồ lực dọc (N) của lời giải chính xác được biểu diễn bằng đường chấm trong hình 3.3c.

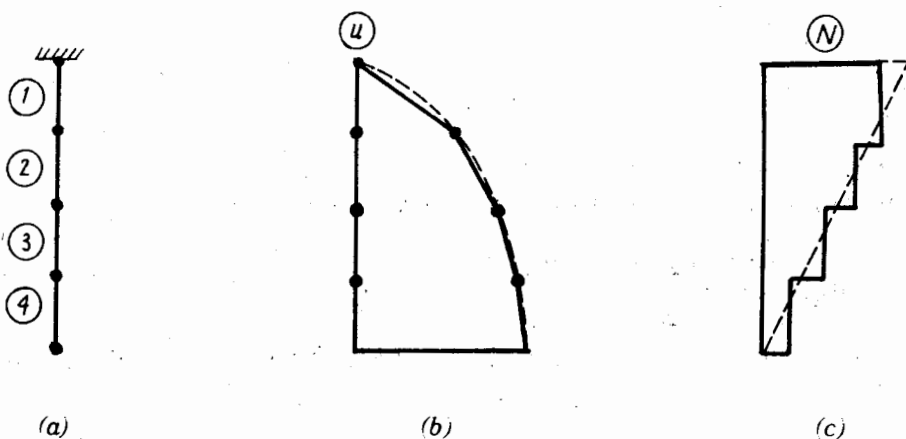


Hình 3.3. Biểu đồ chuyển vị (u) và lực dọc (N) (— Nghiệm PPPTHH --- Nghiệm chính xác)

So sánh 2 kết quả nhận được từ PPPTHH và từ lời giải chính xác của bài toán ta có thể thấy một số nhận xét sau:

- Giá trị chuyển vị tại các nút nhận được từ PPPTHH là trùng với kết quả chính xác. Còn giá trị nội lực là gần đúng và chỉ là giá trị trung bình.

- Nếu tăng số nút lên (tức chia thanh thành nhiều phần tử hơn) biểu đồ chuyển vị u sẽ là 1 đa giác hàm nội tiếp và tiệm cận đến đường cong của nghiệm chính xác (hình 3.4b). Còn biểu đồ nội lực N có dạng đường chữ chi giật bậc xung quanh đường thẳng của nghiệm chính xác (hình 3.4c). Hình vẽ 3.4 cho ta nghiệm của bài toán giải theo PPPTHH với sơ đồ 4 phần tử (hình 3.4a)



Hình 3.4. Biểu đồ chuyển vị (u) và lực dọc (N) theo sơ đồ 4 phần tử
(— Nghiệm PPPTHH --- Nghiệm chính xác)

- Tuy nhiên, có thể thấy rằng giá trị nội lực được tính theo biểu thức

$$N_e = EF [B] \{q\}_e$$

chỉ là nội lực do chuyển vị nút $\{q\}_e$ gây ra.

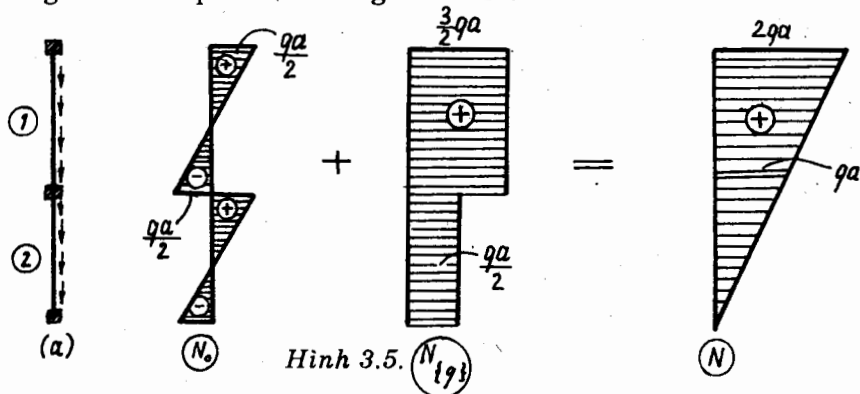
Để có được giá trị lực dọc chính xác ta cần kể thêm thành phần lực dọc do tải trọng phân bố trong phạm vi phần tử khi xem các nút là được gắn cứng lại (hình 3.5a) Hay:

$$N = N_{\{q\}} + N_o$$

Trong đó $N_{\{q\}}$: là lực dọc do chuyển vị nút $\{q\}_e$ gây ra

N_o : lực dọc do tải trọng tác dụng trong phạm vi phần tử gây ra khi xem các nút là bị gắn cứng.

Với bài toán đang xét kết quả cho trong hình 3.5.

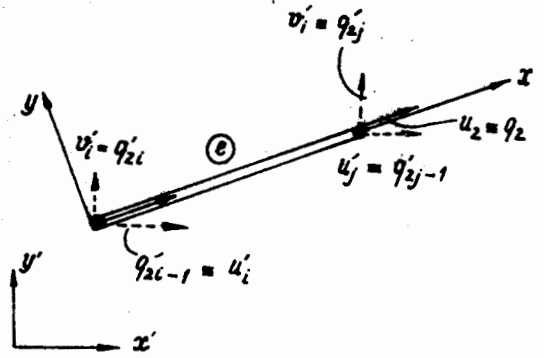


Hình 3.5. $N_{\{q\}}$

2- Phần tử thanh trong dàn phẳng:

Trong dàn phẳng, khi tính theo PPPTHH, người ta xem mỗi mắt dàn là một đỉnh nút, và mỗi thanh dàn là một phần tử chịu biến dạng dọc trục. Rõ ràng nút i bất kỳ của dàn có 2 bậc tự do: là chuyển vị theo phương ngang và phương đứng của nó. Các bậc tự do này được đánh số lần lượt là $2i - 1$ và $2i$.

Xét phần tử thanh bất kỳ mà nút 1 và 2 của nó tương ứng nút i và j theo chỉ số tổng thể. Các nút này có các chuyển vị (q'_{2i-1}, q'_{2i}) và (q'_{2j-1}, q'_{2j}) và sẽ gây ra chuyển vị tại 2 nút theo phương trục thanh là q_1 và q_2 .



Hình 3.6.

$$\text{Để thấy rằng } \begin{cases} q_1 = q'_{2i-1} l_{ij} + q'_{2i} m_{ij} \\ q_2 = q'_{2j-1} l_{ij} + q'_{2j} m_{ij} \end{cases}$$

trong đó: l_{ij}, m_{ij} là cos chỉ phương của trục phần tử (trục x) đối với hệ trục tổng thể xy

Hay, vectơ chuyển vị nút phần tử trong hệ tọa độ địa phương:

$$\{q\}_e \equiv \{u_1, u_2\}_e^T \equiv \{q_1, q_2\}_e^T$$

được biểu diễn qua vectơ chuyển vị nút phần tử trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\begin{aligned} \{q'\}_e &\equiv \{u'_i, v'_i, u'_j, v'_j\}^T \equiv \{q'_{2i-1}, q'_{2i}, q'_{2j-1}, q'_{2j}\}^T \\ \text{nếu sau: } \{q\}_e &= [T]_e \{q'\}_e \end{aligned} \quad (3.5)$$

(2 × 1) (2 × 4) (4 × 1)

$$\text{Trong đó ma trận chuyển trục: } [T]_e = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

(2 × 4)

Vậy ma trận cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể là: (theo công thức (2.26))

$$\begin{aligned} [K']_e &= [T]_e^T [K]_e [T]_e = \begin{bmatrix} l_{ij} & 0 \\ m_{ij} & 0 \\ 0 & l_{ij} \\ 0 & m_{ij} \end{bmatrix} \times \frac{EF}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix} \\ \text{Cuối cùng: } [K']_e &= \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} \\ l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 \\ l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} \\ m_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

đx

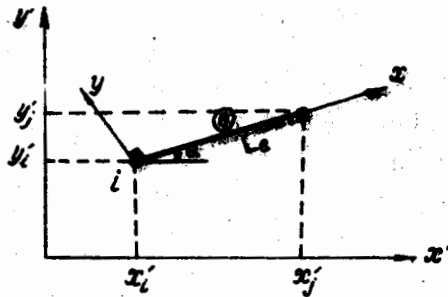
Chú ý: l_{ij} , m_{ij} là cosin chỉ phương của trục phần tử (trục x) trong hệ tọa độ tổng thể và nó cũng là cosin của góc nghiêng giữa đường thẳng nối các nút i và j với các trục x' , y' và chúng được tính qua tọa độ các điểm nút trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$l_{ij} = \cos(x, x') = \frac{x'_j - x'_i}{L} \quad (3.8)$$

$$m_{ij} = \cos(x, y') = \frac{y'_j - y'_i}{L}$$

Ở đây (x'_i, y'_i) và (x'_j, y'_j) là tọa độ của nút i, j trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'$ và L chiều dài phần tử ij và được tính bởi.

$$L = \sqrt{(x'_j - x'_i)^2 + (y'_j - y'_i)^2} \quad (3.9)$$



Hình 3.7

+ Cũng có thể dễ thấy rõ hơn ma trận $[T]_e$ nếu ta gọi α là góc nghiêng giữa trục phần tử (nối từ điểm đầu i tới điểm cuối phần tử là j) đối với trục ngang x' thì dễ thấy rằng: $l_{ij} = \cos \alpha$, $m_{ij} = \sin \alpha$

Hay: $[T]_e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3.10)$

và do vậy công thức $[K']_e$ cũng có thể viết với sự sử dụng góc α này. Cụ thể

$$[K']_e = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ s^2 & -cs & -s^2 & cs \\ dx & & & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

với $c = \cos \alpha$ và $s = \sin \alpha$

α : góc nghiêng giữa trục phần tử (đường nối ij) với trục x'

Nội lực trong thanh dãn:

Vì $\epsilon_x = [B]\{q\}_e$
 $\sigma_x = E \epsilon_x$

nên lực dọc trong thanh dãn, tính theo $\{q\}_e$, được tính là.

$$N_e = \sigma_x F = EF [B] \{q\}_e$$

Còn trong hệ tọa độ tổng thể, ta có thể tính lực dọc theo vectơ chuyển vị nút $\{q'\}_e$ bằng cách thay $\{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e$, ta được:

$$N_e = EF [B] [T]_e \{q'\}_e = [S']_e \{q'\}_e \quad (3.12)$$

Trong đó: Ma trận tính nội lực $[S']_e = EF [B] [T]_e$

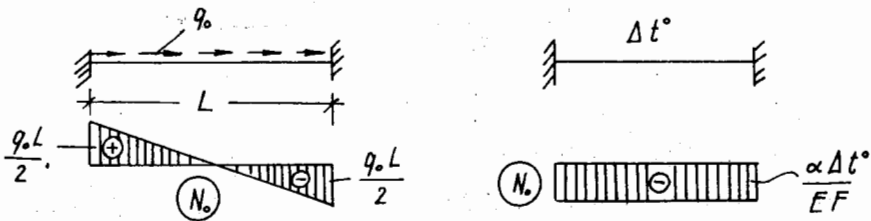
$$\text{hay } [S']_e = EF \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix}$$

$$[S']_e = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} -l_{ij} & -m_{ij} & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

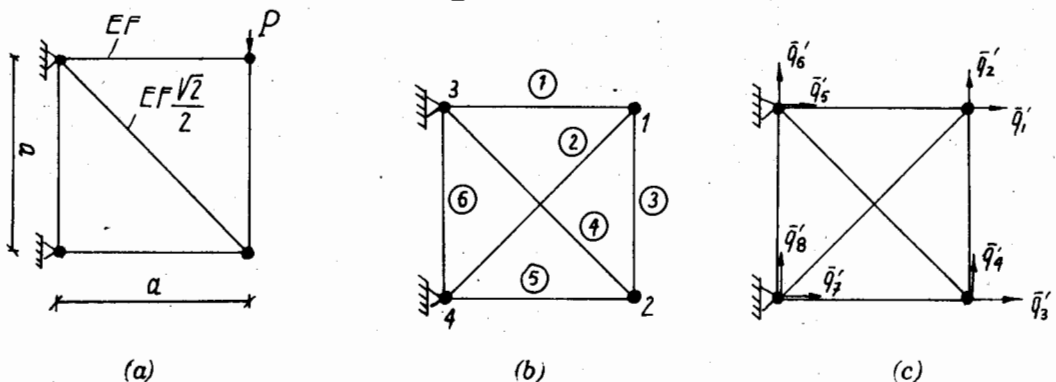
$$\text{hoặc } [S']_e = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Công thức (3.12) cho ta xác định lực dọc trong phần tử do chuyển vị nút $\{q\}$ gây ra. Trường hợp trên chiều dài phần tử còn có tác dụng những lực dọc trục, hay chịu sự thay đổi nhiệt độ thì để có kết quả chính xác đối với nội lực nên kể thêm phần lực dọc do tải trọng hay do biến thiên nhiệt độ gây ra trên phần tử khi xem các nút là cố định.

Cụ thể:



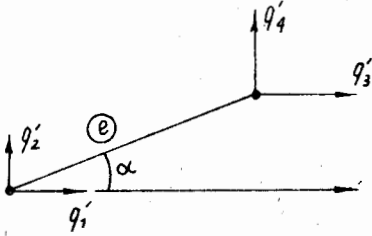
Thí dụ 2: Tìm chuyển vị tại các nút và nội lực các thanh của dàn cho trong hình 3.8. Biết các thanh đứng và ngang có diện tích mặt cắt ngang là F . Các thanh xiên có diện tích mặt cắt ngang là $\frac{\sqrt{2}}{2} F$



Hình 3.8. a. Sơ đồ kết cấu; b. Rời rạc hóa kết cấu: các nút và phần tử; c. Các thành phần của vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{q'\}$.

Giải:

1. Rời rạc hóa kết cấu: Đánh số nút, đánh số phần tử như hình 3.8b. Tại mỗi nút có 2 bậc tự do là 2 chuyển vị thành phần của nút theo 2 trục của hệ tọa độ tổng thể. Các bậc tự do của hệ cho trên hình 3.8c. Thiết lập ma trận chỉ số [b].



Phân tử \ Các bậc tự do của phần tử	Nút i		Nút j	
	1	2	3	4
(1)	5	6	1	2
(2)	7	8	1	2
(3)	1	2	3	4
(4)	5	6	3	4
(5)	7	8	3	4
(6)	5	6	7	8

Để tiện cho tính toán sau này, ta tính sẵn các đại cần tính đối với các phần tử trong bảng sau:

Phân tử	Nút i	Nút j	α	c^2	s^2	cs	l	F	EF/l
(1)	3	1	0°	1	0	0	a	F	EF/a
(2)	4	1	45°	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$a\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}F}{2}$	EF/a
(3)	1	2	-90°	0	1	0	a	F	EF/a
(4)	3	2	-45°	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$a\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}F}{2}$	EF/a
(5)	4	2	0°	1	0	0	a	F	EF/a
(6)	3	4	-90°	0	1	0	a	F	EF/a

2. Thiết lập các ma trận cứng phần tử: Sử dụng công thức (3.7) và bảng tính sẵn ở trên ta có:

$$[K']_1 = [K']_5 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

$$[K']_2 = \frac{EF}{4a} \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ & 1 & -1 & -1 \\ & dx & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[K']_3 = [K']_6 = \frac{EF}{a} \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & dx & 0 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{matrix}$$

$$[K']_4 = \frac{EF}{4a} \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & 1 & -1 \\ & dx & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Từ các ma trận độ cứng phần tử này, sử dụng ma trận chỉ số [b] thực hiện ghép nối phần tử, cuối cùng ta có ma trận cứng tổng thể $[K']$ có kích thước (8×8)

$$\overline{[K']} = \frac{EF}{4a} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & -1 \\ & 5 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ & & 5 & -1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ & & & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & \text{đối xứng} & & & 5 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & 5 & 0 & -4 \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

3. Xác định vectơ tải phần tử $\{P'\}_e$ và vectơ tải tổng thể $\{P'\}_e$

Để thấy là, do trên các thanh dầm không có tải trọng tác dụng nên.

$$\{P'\}_1 = \{P'\}_2 = \{P'\}_3 = \dots = \{P'\}_6 = \{0\}$$

Do vậy vectơ tải tổng thể sẽ chỉ là do vectơ tải trọng nút (tải trọng tập trung tác dụng tại các nút kể cả các phản lực chưa biết) tạo nên. Cụ thể là:

$$\{P'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \{P'\}_n$$

Hay:

$$\{\bar{P}'\} = \{P'\}_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ H_3 \\ V_3 \\ H_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

trong đó H_i, V_i là phản lực theo phương ngang và phương đứng tại nút i . Cũng nhận xét rằng 4 thành phần đầu của vectơ tải tổng thể là xác định trong khi 4 thành phần sau là chưa biết. Đối ngẫu với điều này thì ở vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{q'\}$ có 4 thành phần đầu là 4 thành phần chuyển vị nút chưa biết và là ẩn số của bài toán còn 4 thành phần sau lại là các chuyển vị đã biết và bằng 0.

4. Áp đặt điều kiện biên và xây dựng hệ phương trình để giải $[\bar{K}']\{q'\} = \{\bar{P}'\}$.

Như đã nói ở trên do 4 thành phần chuyển vị $q'_5 = q'_6 = q'_7 = q'_8 = 0$ nên bằng cách "xóa đi" các hàng và cột 5, 6, 7, 8 của ma trận $[K']$ cũng như "xóa đi" các thành phần 5, 6, 7, và 8 của vectơ tải tổng thể $\{P'\}$ ta nhận được hệ phương trình để giải $[\bar{K}']\{q'\} = \{\bar{P}'\}$ như sau.

$$\frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ & 5 & 0 & -4 \\ dx & 5 & -1 & \\ & & 5 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}'_1 \\ \bar{q}'_2 \\ \bar{q}'_3 \\ \bar{q}'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được 4 chuyển vị chưa biết:

$$\{\bar{q}'\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}'_1 \\ \bar{q}'_2 \\ \bar{q}'_3 \\ \bar{q}'_4 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{11EF} \begin{Bmatrix} 6 \\ -30 \\ -5 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

5. Tính lực dọc trong các thanh dầm:

Sử dụng ma trận chỉ số $[b]$ và $\{\bar{q}'\}$ vừa tìm được, ta xác định các vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q'\}_e$. Ví dụ:

$$\{q'\}_1 = \frac{Pa}{11EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -30 \end{Bmatrix}, \{q'\}_2 = \frac{Pa}{11EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -30 \end{Bmatrix}, \{q'\}_3 = \frac{Pa}{11EF} \begin{Bmatrix} 6 \\ -30 \\ -5 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

$$\{q'\}_4 = \frac{Pa}{11EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -25 \end{Bmatrix}, \{q'\}_5 = \frac{Pa}{11EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -25 \end{Bmatrix}, \{q'\}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Sử dụng (3.12) và (3.14), ta tìm được lực dọc N của các phần tử. Ví dụ với phần tử (1): $((\cos \alpha = 1, \sin \alpha = 0))$

$$N_1 = [S']_1 \{q'\}_1 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{Pa}{11EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -30 \end{Bmatrix} = \frac{6}{11} P$$

Với phần tử (2): $(\cos \alpha = \sqrt{2}/2, \sin \alpha = \sqrt{2}/2)$

$$N_2 = [S']_2 \{q'\}_2 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \frac{Pa}{11EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -30 \end{Bmatrix} = \frac{6\sqrt{2}}{11} P$$

Với phần tử (3): $(\cos \alpha = 0; \sin \alpha = -1)$

$$N_3 = [S']_3 \{q'\}_3 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{Pa}{11EF} \begin{Bmatrix} 6 \\ -30 \\ -5 \\ -25 \end{Bmatrix} = -\frac{5}{11} P$$

Lực dọc các phần tử còn lại tìm tương tự.

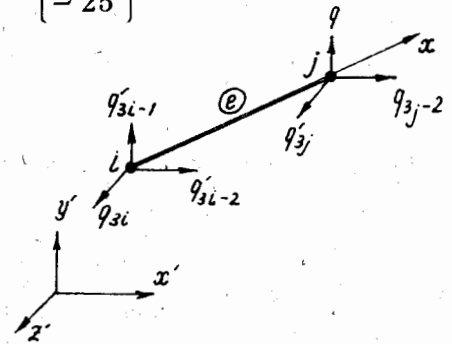
3- Dàn không gian:

Nếu xem mỗi mắt dàn là 1 điểm nút và 1 thanh dàn là một phần tử, thì dễ thấy rằng mỗi điểm nút có ba bậc tự do: đó là 3 chuyển vị thành phần theo 3 phương x', y', z' của hệ tọa độ kết cấu. Và vectơ chuyển vị nút phần tử trong hệ tọa độ kết cấu là: (Cụ thể với phần tử mà điểm đầu và cuối là nút i và j)

$$\begin{aligned} \{q'\}_{(e)} &\equiv \{u'_i, v'_i, w'_i, u'_j, v'_j, w'_j\}^T \\ (6 \times 1) &= \{q'_{3i-2}, q'_{3i-1}, q'_{3i}, q'_{3j-2}, q'_{3j-1}, q'_{3j}\}^T \end{aligned}$$

Trong hệ tọa độ địa phương xyz (với x là trục phần tử, hay trục nối 2 nút i và j) vectơ chuyển vị nút phần tử vẫn là:

$$\{q\}_{(e)} \equiv \{u_i, u_j\}^T \\ (2 \times 1)$$



Hình 3.9. Phần tử dàn không gian

Trong đó u_i, u_j là chuyển vị của nút i và nút j theo phương x (phương nối i và j).

Vậy quan hệ giữa $\{q'\}_e$ và $\{q\}_e$ chính là:

$$\{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e$$

trong đó ma trận biến đổi $[T]_e$ là:

$$[T]_e = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \end{bmatrix}$$

(2 × 6)

với l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} là các cosin chỉ phương của đường nối ij trong hệ tọa độ kết cấu $x'y'z'$ và được xác định qua tọa độ các đỉnh nút i, j bằng các công thức quen thuộc:

$$l_{ij} = \frac{x'_j - x'_i}{L}, \quad m_{ij} = \frac{y'_j - y'_i}{L}, \quad n_{ij} = \frac{z'_j - z'_i}{L}$$

và
$$L = \sqrt{(x'_j - x'_i)^2 + (y'_j - y'_i)^2 + (z'_j - z'_i)^2}$$

Ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ địa phương $[K]_e$ là đã biết (công thức (3.1)) vậy ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ kết cấu là:

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e$$

(6 × 6) (6 × 2) (2 × 2) (2 × 6)

Cụ thể:

$$[K']_e = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}n_{ij} \\ & m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & -m_{ij}n_{ij} \\ & & n_{ij}^2 & -l_{ij}n_{ij} & -n_{ij}m_{ij} & -n_{ij}^2 \\ & & & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} \\ & & & & m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} \\ & & & & & n_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

(6 × 6)

đối xứng

Trong đó,

E: modun đàn hồi Young của vật liệu

F: diện tích mặt cắt ngang thanh

L: chiều dài phần tử.

§3-2. KHUNG PHẪNG

1. Phần tử dầm chịu uốn - Dầm liên tục.

Xét phần tử dầm chịu uốn có chiều dài L , mặt cắt ngang không đổi. Như đã trình bày trong thí dụ 2, chương 2: chuyển vị của mọi điểm theo phương vuông góc trục thanh $v(x)$ được chọn là đa thức xấp xỉ bậc 3.

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3.$$

Hay $v(x) = [P(x)] \{a\} \quad (*)$

với $[P(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}$

và vectơ tham số: $\{a\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4\}^T$

Từ điều kiện đồng nhất chuyển vị nút là các giá trị của hàm $v(x)$ và đạo hàm bậc nhất của nó tại các điểm nút 1 và 2 của phần tử, ta có:

$$\{q\}_e = [A] \{a\}$$

trong đó $\{q\}_e$ là vectơ chuyển vị nút phần tử và:

$$\{q\}_e = \{v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2\}_e^T \equiv \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4\}_e^T$$

Còn

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \text{ và tồn tại nghịch đảo: } [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix}$$

Từ đó: $\{a\} = [A]^{-1} \{q\}_e$

Thay $\{a\}$ vào (*) ta biểu diễn được hàm chuyển vị $v(x)$ theo vectơ chuyển vị nút $\{q\}_e$.

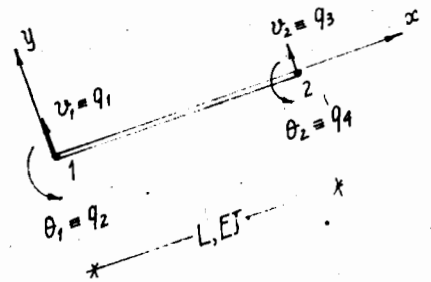
$$v(x) = [P(x)] [A]^{-1} \{q\}_e = [N] \{q\}_e \quad (3.15)$$

Với $[N]$: Ma trận các hàm dạng và $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

Trong đó:

$$N_1(x) = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$N_2(x) = x \left(1 - 2 \frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right)$$

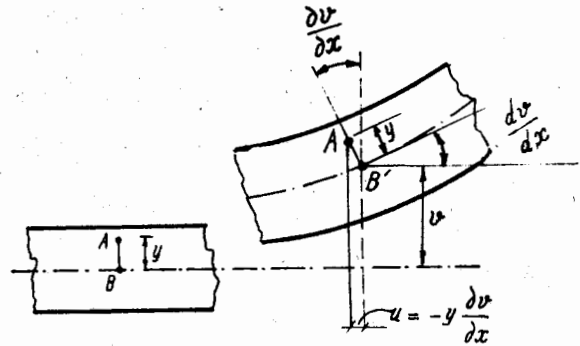


Hình 3.10. Phần tử dầm chịu uốn.

$$N_3(x) = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$N_4(x) = x \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right)$$

Như đã biết ở Giáo trình Sức bền vật liệu, khi dầm chịu uốn mặt cắt ngang của dầm còn là phẳng khi biến dạng và xoay đi góc $\theta = \frac{dv}{dx}$. Do đó chuyển vị dọc trục u và độ võng v có quan hệ (như hình 3.11).



$$u = -y \frac{dv}{dx}$$

trong đó y là khoảng cách từ điểm đang xét tới đường trung hòa.

Khi đó biến dạng dọc trục:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Sử dụng (3.15):

$$\epsilon_x = -y \frac{d^2 [N]}{dx^2} \{q\}_e = [B] \{q\}_e$$

Trong đó: $[B] = -y \frac{d^2}{dx^2} [N]$

$$\text{Hay } [B] = -y \left[\left(-\frac{6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3} \right) \left(-\frac{4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \right) \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \right] \quad (3.16)$$

Ứng suất tại mọi điểm của dầm chịu uốn.

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

Hay ở dạng ma trận $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$.

Ở đây ma trận $[D] = [E]$

(3.17)

Sử dụng công thức (2.16), ma trận độ cứng phần tử dầm chịu uốn được xác định như sau.

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = E \int_L \int_F [B]^T [B] dF \cdot dx$$

Hay:

Hình 3.11. Biến dạng của phần tử dầm chịu uốn.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\epsilon_x}{y} = -\frac{\sigma_x}{E \cdot y}$$

$$\sigma_x = \frac{M}{J} y \Rightarrow -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$[K]_e = \frac{E J_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{đối xứng} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Ở đây $J_z = \int_F y^2 dF$ là mômen quán tính của mặt cắt ngang lấy với trục z . Với

vector tải phần tử $\{P\}_e$, trường hợp tổng quát, khi trên chiều dài phần tử có tải trọng phân bố $q(x)$, các lực tập trung Q_i và các mômen tập trung M_i tác dụng thì trên cơ sở công thức (2.17) hay từ sự cân bằng công của lực nút trên các chuyển vị nút tương ứng và tổng công của các ngoại lực (trên phần tử) trên các chuyển dời tương ứng, ta có thể tìm vector tải phần tử $\{P\}_e$ theo công thức sau:

$$\{P\}_e = \int_L [N]^T q(x) dx + \sum_{i=1}^{n_Q} [N(x_{Q_i})]^T Q_i + \sum_{i=1}^{n_M} \left[\frac{dN}{dx}(x_{M_i}) \right]^T M_i \quad (3.19)$$

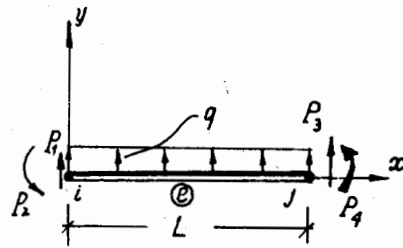
Trong đó:

$q(x)$: cường độ lực phân bố trên chiều dài phần tử,

Q_i và x_{Q_i} : lực tập trung và hoành độ điểm đặt lực trên hệ trục địa phương,

M_i và x_{M_i} : Momen tập trung và hoành độ điểm đặt trên hệ trục phần tử,

n_Q và n_M : số lực tập trung và số momen tập trung trên chiều dài phần tử đang xét.



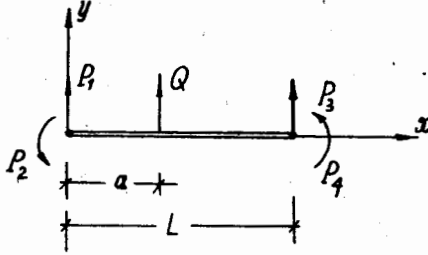
Hình 3.12.

Sử dụng (3.19) xác định vector tải phần tử cho một vài trường hợp cụ thể.

- Trường hợp tải trọng phân bố đều trên phần tử (Hình 3.12).

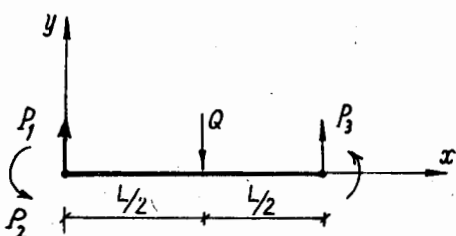
$$\{P\}_e = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}_e = \int_L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} q dx = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

- Trường hợp trên phần tử có lực tập trung giá trị Q đặt cách nút đầu phần tử khoảng cách a ($x_Q = a$) (Hình 3.13)

$$\{P\}_e = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}_e = [N(a)]^T Q = Q \begin{bmatrix} 1 - \frac{3a^2}{L^2} + 2\frac{a^3}{L^3} \\ a - \frac{2a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2} \\ \frac{3a^2}{L^2} - \frac{2a^3}{L^3} \\ -\frac{a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2} \end{bmatrix}$$


Hình 3.13.

Trường hợp đặc biệt, khi Q đặt tại giữa nhịp phần tử ($x_Q = \frac{L}{2}$) (Hình 3.14)



$$\{P\}_e = \begin{Bmatrix} \frac{PL}{2} \\ \frac{PL^2}{8} \\ \frac{PL}{2} \\ -\frac{PL^2}{8} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Hình 3.14.

Để tìm mômen uốn nội lực trong phần tử dầm, như trong Sức bền vật liệu, với hệ trục tọa độ địa phương như trên thì dễ thấy rằng, trường hợp phần tử có tiết diện không đổi, ta đã có:

$$M = EJ \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Vậy nếu tính theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ thì:

$$M(x) = EJ \frac{d^2}{dx^2} [N]\{q\}_e = EJ [N''] \{q\}_e \quad (3.22)$$

Ở đây $[N''] = \frac{d^2}{dx^2} [N] = [N''_1 \quad N''_2 \quad N''_3 \quad N''_4]$

Từ (3.22) dễ nhận thấy rằng, khi các hàm dạng $N_i(x)$ là các hàm nội suy Hecmit bậc 3, thì $N''_i(x)$ là bậc nhất và do đó mômen uốn $M(x)$ là hàm tuyến tính trong phần tử.

Nếu gọi:

$\{M\}_e = \begin{Bmatrix} M \text{ (tại nút 1)} \\ M \text{ (tại nút 2)} \end{Bmatrix}_e$ là vectơ mômen uốn tại các đầu nút phần tử thì

$$\{M\}_e = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = EJ \begin{Bmatrix} [N''(x=0)] \\ [N''(x=L)] \end{Bmatrix} \{q\}_e$$

$$\text{Hay: } \{M\}_e = [S]_e \{q\}_e \quad (3.23)$$

(2 × 1) (2 × 4) (4 × 1)

Ở đây $[S]_e$: ma trận tính mômen

$$\text{và } [S]_e = EJ \begin{Bmatrix} [N''(0)] \\ [N''(L)] \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

(2 × 4)

Cũng có thể nhận thấy rằng, tương tự như trong phương pháp chuyển vị của Giáo trình Cơ kết cấu, mômen uốn $M(x) = EJ [N''] \{q\}_e$ là mômen do các chuyển vị nút gây ra. Để đầy đủ, trong trường hợp trên chiều dài phần tử có lực tác dụng, cần cộng thêm mômen M_0 do tải trọng này gây ra trên phần tử khi xem tất cả các nút được gắn cứng.

Thí dụ: Giải dầm liên tục dưới đây theo PPPTHH (hình 3.15a)

Bài toán được giải theo trình tự sau:

1) *Rời rạc hóa kết cấu:* Đánh số nút: 1, 2, 3

Đánh số phần tử: (1), (2)

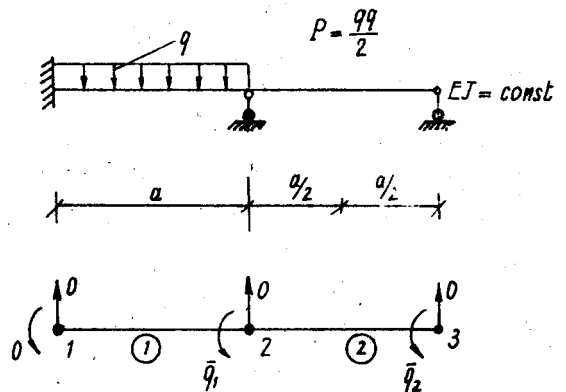
Đánh số các bậc tự do của kết cấu:

Chú ý là bây giờ ta chỉ đánh số các bậc tự do chưa biết. Còn tất cả các bậc tự do bằng 0 đã biết sẽ đánh số 0. Với bài này thì rõ ràng chỉ có góc xoay tại nút 2 và 3 là chưa biết và là ẩn số. Và được đánh số 1, 2. (Việc này cũng được xem như tiến hành áp đặt điều kiện biên ngay từ đầu). Đó cũng chính là 2 thành phần của vectơ chuyển vị nút ẩn số $\{\bar{q}^*\}$. Hay:

$$\{\bar{q}^*\} = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix}$$

Thiết lập ma trận chỉ số $[b]$.

Chi số địa phương Phần tử	Nút i		Nút j	
	1	2	3	4
(1)	0	0	0	1
(2)	0	1	0	2



Hình 3.15. a. Sơ đồ kết cấu và tải trọng;
b. Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do.

2) Thiết lập ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ và từ đó "ghép nối phần tử" xây dựng luôn ma trận cứng tổng thể đã kể tới điều kiện biên $[\bar{K}^*]$

Để thấy rằng $[K]_1 = [K]_2$ và cụ thể là

$$[K]_1 = \frac{EJ}{a^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ & & 12 & -6a \\ \text{đối xứng} & & & 4a^2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix}, [K]_2 = \frac{EJ}{a^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ & & 12 & -6a \\ \text{đối xứng} & & & 4a^2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Chú ý rằng do đã sử dụng các điều kiện biên nên khi "ghép nối phần tử" ta sẽ nhận được ma trận $[\bar{K}^*]$ có kích thước (2×2) . Ma trận $[\bar{K}^*]$ được "ghép" chỉ bởi các thành phần của $[K]_1$ và $[K]_2$ mà các thành phần này có cả 2 chỉ số tổng thể tương ứng là khác 0.

Ví dụ trong tất cả 16 thành phần của $[K]_1$ thì chỉ có thành phần k_{44}^1 có cả 2 chỉ số tổng thể là khác 0 và nó sẽ được "cộng gộp" thêm vào ô $(1; 1)$ của ma trận $[\bar{K}^*]$.

Còn thành phần k_{24}^2 của ma trận $[K]_2$ sẽ được "gộp thêm" vào ô $(1; 2)$ của ma trận $[\bar{K}^*]$.

Vậy:

$$[\bar{K}^*] = \frac{EJ}{a^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4a^2 + 4a^2 & 2a^2 \\ \text{đx} & 4a^2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\text{Hay } [\bar{K}^*] = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 8a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 4a^2 \end{bmatrix}$$

3) Tìm các vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ rồi "ghép nối phần tử" và xây dựng $\{\bar{P}^*\}$

Sử dụng các công thức (3.20), (3.21) với chú ý chiều lực quy ước dương là cùng chiều dương các trục tọa độ địa phương. Ta có

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{qa}{2} \\ -\frac{qa^2}{12} \\ -\frac{qa}{2} \\ \frac{qa^2}{12} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}, \quad \{P\}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{qa}{4} \\ -\frac{qa^2}{16} \\ -\frac{qa}{4} \\ \frac{qa^2}{16} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Và, cũng tương tự trên, với nhận xét là $\{\bar{P}^*\}_n = \{0\}$ vì tại nút không có các tải tập trung (mômen tập trung) tương ứng các bậc tự do $\bar{q}_1, \bar{q}_2$

$$\{\bar{P}^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{qa^2}{12} - \frac{qa^2}{16} \\ \frac{qa^2}{16} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{48} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

4) Giải hệ phương trình hệ thống: $[\bar{K}^*]\{\bar{q}^*\} = \{\bar{P}^*\}$

$$\text{Hay} \quad \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 8a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{48} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Kết quả là} \quad \{\bar{q}^*\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{672} \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} -1 \\ 11 \end{Bmatrix}$$

5) Hoàn thiện hay tính nội lực: Biết $\{\bar{q}^*\}$, sử dụng ma trận $[b]$, ta có các vector chuyển vị nút của các phần tử là:

$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{q}_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{672} \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \{q\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{q}_1 \\ 0 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{672} \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 11 \end{Bmatrix}$$

Vậy sử dụng (3.23) và (3.24), ta xác định được vector mômen uốn của các phần tử do chuyển vị nút gây ra.

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1 = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} -6a & -4a^2 & 6a & -2a^2 \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{q}_1 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{672} \begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \end{Bmatrix}$$

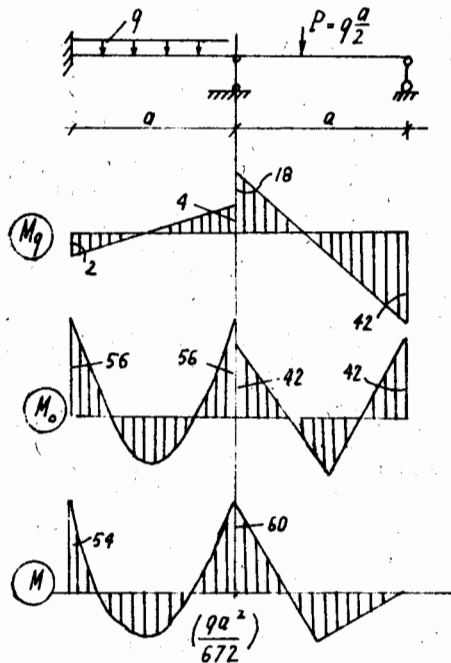
$$\{M\}_2 = [S]_2 \{q\}_2 = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} -6a & -4a^2 & 6a & -2a^2 \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{q}_1 \\ 0 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{672} \begin{Bmatrix} -18 \\ 42 \end{Bmatrix}$$

Từ $\{M\}_1$ và $\{M\}_2$ dễ dàng vẽ được biểu đồ (M_q)

Khi xem các nút là gán cứng, ta cũng dễ dàng vẽ được biểu đồ (M_o) do tải trọng trên các phần tử gây ra.

Kết quả: $(M) = (M_q) + (M_o)$

Biểu đồ mômen uốn (M) cho trên hình 3.16.



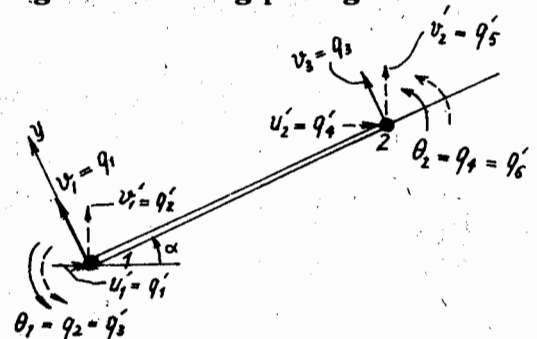
Hình 3.16. Biểu đồ mômen uốn (nhân với hằng số $qa^2/672$).

2- Phần tử dầm chịu uốn trong hệ tọa độ tổng thể - Khung phẳng.

Như ở trên đã biết: Trong hệ tọa độ địa phương xyz chuyển vị $v(x)$ của phần tử dầm chịu uốn được biểu diễn qua vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ và

$$\begin{aligned} \{q\}_e &= \{v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2\}^T \\ (4 \times 1) & \\ &\equiv \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4\}^T \end{aligned}$$

Trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$: các chuyển vị nút v_1 và v_2 có thể phân thành các thành phần theo 2 phương x', y' .



Hình 3.17. Phần tử dầm chịu uốn trong hệ tọa độ tổng thể.

Khi đó, nếu gọi vectơ chuyển vị nút phần tử trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$ là $\{q'\}_e$ và:

$$\begin{aligned} \{q'\}_e &= \{u'_1 \ v'_1 \ \theta'_1 \ u'_2 \ v'_2 \ \theta'_2\}^T \\ (6 \times 1) &= \{q'_1 \ q'_2 \ q'_3 \ q'_4 \ q'_5 \ q'_6\}^T \end{aligned}$$

thì dễ thấy quan hệ giữa các thành phần của $\{q\}_e$ và $\{q'\}_e$ là:

$$\begin{cases} q_1 = l_y q'_1 + m_y q'_2 \\ q_2 = n_z q'_3 = q'_3 \\ q_3 = l_y q'_4 + m_y q'_5 \\ q_4 = n_z q'_6 \end{cases} \quad \text{Hay } \{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e$$

$(4 \times 1) \qquad (4 \times 6) \quad (6 \times 1)$

Với ma trận biến đổi trục tọa độ $[T]_e =$

$$\begin{bmatrix} l_y & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

trong đó l_y, m_y : cosin chỉ phương của trục y trong hệ tọa độ tổng thể.

Nếu gọi α là góc nghiêng giữa trục phần tử với trục phương ngang (trục x') thì có thể sử dụng $[T]_e$ ở dạng sau:

$$[T]_e = \begin{bmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Sử dụng các công thức (2.26), (3.18) và (3.26), ta có:

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e$$

$(6 \times 6) \qquad (6 \times 4) \quad (4 \times 4) \quad (4 \times 6)$

Ma trận cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể là

$$[K]_e = \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 12s^2 & -12cs & -6Ls & -12s^2 & 12cs & -6Ls \\ & 12c^2 & 6Lc & 12cs & -12c^2 & 6Lc \\ & & 4L^2 & 6Ls & -6Lc & 2L^2 \\ & & & 12s^2 & -12cs & 6Ls \\ & & & & 12c^2 & -6Lc \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

dx

Trong đó $c = \cos\alpha = l_y$

$s = \sin\alpha = m_y$

L: chiều dài phần tử.

Mômen uốn trong phần tử dầm tính theo $\{q'\}_e$:

Như trên đã biết, mômen uốn tại 2 nút đầu cuối phần tử được tính theo $\{q\}_e$ theo (3.23):

$$\{M\}_e = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}_e = [S]_e \{q\}_e$$

vậy để tính theo $\{q'\}_e$ ta chỉ cần thay $\{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e$ vào.

Hay: $\{M\}_e = [S]_e [T]_e \{q'\}_e$

Hay: $\{M\}_e = [S']_e \{q'\}_e$ (3.28)

Trong đó $[S']_e$: ma trận tính nội lực (mômen) phần tử theo vectơ chuyển vị nút trong hệ tọa độ kết cấu $\{q'\}_e$

và: $[S']_e = [S]_e [T]_e$

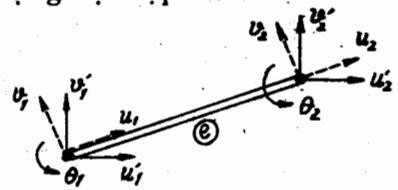
$$[S']_e = \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 6Ls & -6Lc & -4L^2 & -6Ls & 6Lc & -2L^2 \\ -6Ls & 6Lc & 2L^2 & 6Ls & -6Lc & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

3- Ma trận cứng của phần tử khung phẳng (phần tử chịu uốn + kéo (nén) đồng thời).

Mỗi phần tử khung phẳng có hai nút, mỗi nút có 3 bậc tự do (chuyển vị đứng, ngang và xoay). Các chuyển vị nút gây ra các biến dạng độc lập nhau:

+ Phần tử bị biến dạng dọc trục bởi $\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e$

+ Phần tử bị uốn bởi $\{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}_e$



Hình 3.18. Phần tử khung phẳng.

Do vậy cộng tác dụng của 2 trường hợp chịu biến dạng dọc trục và uốn ta có ma trận cứng phần tử của phần tử khung vừa chịu uốn + kéo (nén).

$$[K^e] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} Ac^2 + Bs^2 & (A - B)cs & -B \frac{L}{2}s & -(Ac^2 + Bs^2) & -(A - B)cs & -\frac{BL}{2}s \\ & As^2 + Bc^2 & \frac{BL}{2}c & -(A - B)cs & -(As^2 + Bc^2) & \frac{BL}{2}c \\ & & 4J & \frac{BL}{2}s & -\frac{BL}{2}c & 2J \\ & & & Ac^2 + Bs^2 & (A - B)cs & \frac{BL}{2}s \\ & & & & As^2 + Bc^2 & -\frac{BL}{2}s \\ & & & & & 4J \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

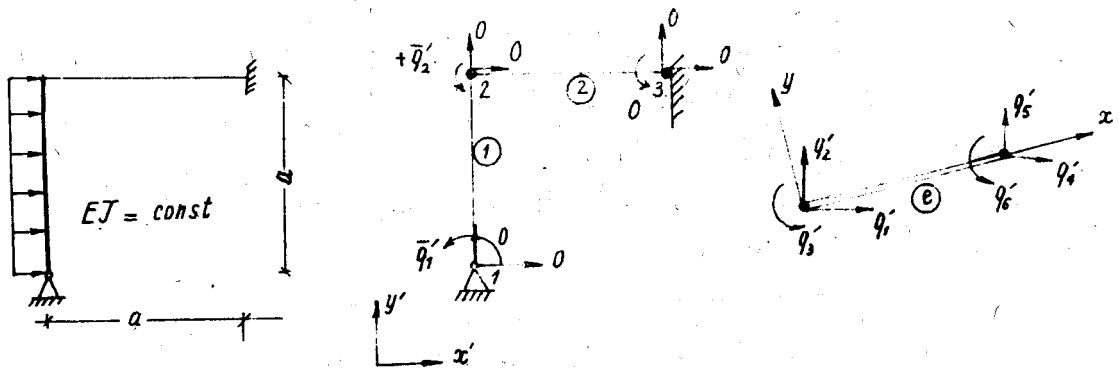
đối xứng

trong đó $c = \cos \alpha = l_y$ $s = \sin \alpha = m_y$,

$$B = \frac{12J}{L^2}$$

A: diện tích mặt cắt ngang phần tử.

Thí dụ: Giải khung sau theo phương pháp phần tử hữu hạn. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đối với chuyển vị của hệ.



Hình 3.19. Bài toán khung phẳng.

Giải:

- 1) *Rời rạc hóa kết cấu:* Đánh số các điểm nút, 1, 2, 3. Đánh số phần tử: (1), (2). Các số liệu về phần tử được tính sẵn trong bảng dưới đây:

Phần tử	Nút i	Nút j	α	$c = \cos \alpha$	$s = \sin \alpha$	c^2	s^2	cs	EJ/L^3
(1)	1	2	90°	0	1	0	1	0	EJ/a^3
(2)	2	3	0°	1	0	1	0	0	EJ/a^3

Đánh số các bậc tự do: Chú ý rằng, lẽ ra tại mỗi nút có 3 bậc tự do và toàn hệ có $3 \times 3 = 9$ bậc tự do. Nhưng do bỏ qua những ảnh hưởng của lực dọc, và do điều kiện biên động học tại các nút 1 và 3 nên có thể nói rằng trong 9 bậc tự do (chuyển vị nút) này thì có 7 chuyển vị đã biết và là bằng 0; chỉ còn 2 bậc tự do chưa biết: là 2 góc xoay tại nút 1 và 2. Và ta đánh số chúng là 1 và 2. Còn các chuyển vị thành phần khác ta đánh số 0. Vậy vectơ chuyển vị nút chưa biết là.

$$\{\bar{q}'^*\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}'_1 \\ \bar{q}'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Còn ma trận chỉ số [b] có thể thấy từ bảng dưới đây:

Phần tử \ Chỉ số đ.ph	Nút i			Nút j		
	1	2	3	4	5	6
(1)	0	0	1	0	0	2
(2)	0	0	2	0	0	0

2) *Thiết lập ma trận cứng phần tử $[K']_e$:* Do bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc nên chỉ cần sử dụng (3.27) để xác định ma trận cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể $[K']_e$

$$[K']_{(1)} = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & -6a & -12 & 0 & -6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4a^2 & 6a & 0 & 2a^2 & & \\ 12 & 0 & 6a & & & \\ dx & & 0 & 0 & & \\ & & & 4a^2 & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Chỉ số tổng thể} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

$$[K']_{(2)} = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 6a & 0 & 12 & 6a & \\ 4a^2 & 0 & -6a & 2a^2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 12 & -6a & & & & \\ & 4a^2 & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Chỉ số tổng thể} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

3) Ma trận cứng tổng thể $[K']$ (có kể đến điều kiện biên)

$$[\overline{K}'] = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4a^2 & 2a^2 \\ dx & 4a^2 + 4a^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Chỉ số tổng thể} \\ 1 \\ 2 \end{matrix} = \frac{EJ}{a} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

3) Thiết lập $\{P'\}_e$: Theo biểu thức $\{P'\}_e = [T]_e^T \{P\}_e$
(6 × 4) (4 × 1)

$$\{P'\}_e = \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \\ P'_5 \\ P'_6 \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} -sP_1 \\ cP_1 \\ P_2 \\ -sP_3 \\ cP_3 \\ P_4 \end{bmatrix}_e$$

Hay có thể thấy rằng P'_1 và P'_2 là hình chiếu của P_1 lên các trục tổng thể x' và y' . P'_4 và P'_5 là hình chiếu của P_3 lên các trục tổng thể x' và y' . Còn $P'_3 = P_2$ và $P'_6 = P_4$ (do trục z' cùng phương trục z)

Từ đó có thể trực tiếp từ sơ đồ tác dụng của $\{P\}_e$ để suy ra $\{P'\}_e$ trong bài

toán ví dụ này.

Cụ thể:

Chỉ số tổng thể

$$\{P\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} -\frac{qa}{2} \\ -\frac{qa^2}{12} \\ -\frac{qa}{2} \\ \frac{qa^2}{12} \end{Bmatrix}_{(1)} \Rightarrow \{P'\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} \frac{qa}{2} \\ 0 \\ -\frac{qa^2}{12} \\ \frac{qa}{2} \\ 0 \\ \frac{qa^2}{12} \end{Bmatrix}_{(1)}$$

Còn $\{P\}_{(2)} = \{0\}$ nên $\{P'\}_{(2)} = \{0\}$ (do trên phần tử không có tải trọng tác dụng).

4) Thiết lập $\{\bar{P}^*\}$ từ các $\{P'\}_{(e)}$:

$$\text{Để thấy: } \{\bar{P}^*\} = \begin{Bmatrix} -\frac{qa^2}{12} \\ \frac{qa^2}{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Hay} \quad \{\bar{P}^*\} = \frac{qa^2}{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

5) Giải hệ phương trình hệ thống:

$$[\bar{K}^*]\{q^*\} = \{\bar{P}^*\} \Rightarrow \frac{EJ}{a} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Giải ra: } \begin{Bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{7 \cdot 24} \cdot \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} -5 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

6) Hoàn thiện: Vẽ biểu đồ nội lực:

(+) Phần tử (1): có $c = 0$, $s = 1$; $\{M\}_{(1)} = [S']_{(1)}\{q'\}_{(1)}$

$$\{M\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}_{(1)} = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 6a & 0 & -4a^2 & -6a & 0 & -2a^2 \\ -6a & 0 & 2a^2 & 6a & 0 & 4a^2 \end{bmatrix} \times \frac{qa^3}{7 \cdot 24 EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{7 \cdot 12} \begin{Bmatrix} 7 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

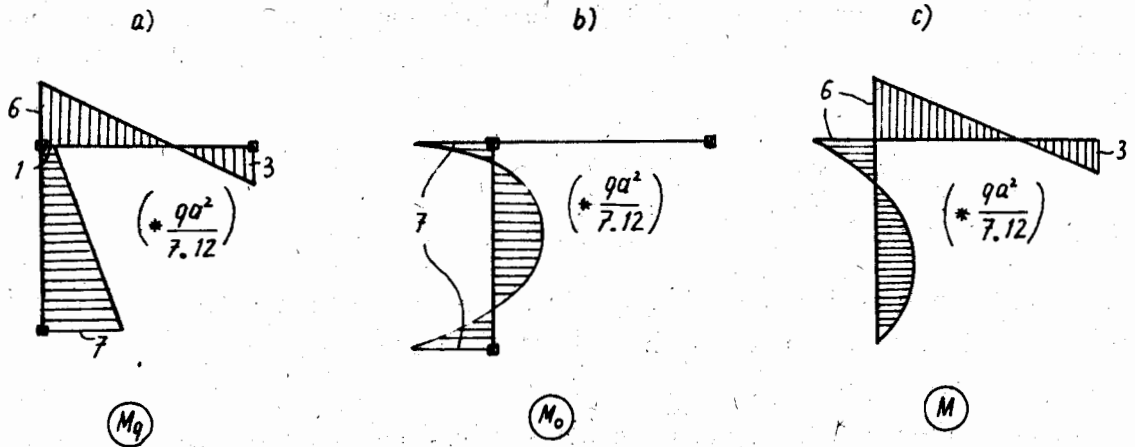
(+) Phần tử (2): có $c = 1$, $s = 0$.

$$M_{(2)} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}_{(2)} = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6a & -4a^2 & 0 & 6a & -2a^2 \\ 0 & 6a & 2a^2 & 0 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} \times \frac{qa^3}{7.24 EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{7.12} \begin{Bmatrix} -6 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Biểu đồ momen uốn (M_q) được vẽ từ kết quả trên. (M_o) được vẽ khi xem các nút bị gắn cứng và các phần tử chịu tải trọng tác dụng trên chiều dài phần tử.

Biểu đồ kết quả: (M) = (M_q) + (M_o)

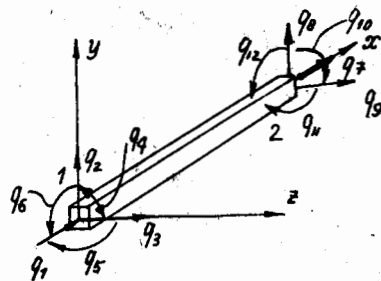
Các biểu đồ mômen (M_q), (M_o) và (M) được cho trong hình 3.20. Chú ý là giá trị các tung độ biểu đồ cần nhân với hệ số bằng $\frac{qa^2}{7.12}$



Hình. 3.20: Biểu đồ mômen uốn. a) Biểu đồ (M_q). b) Biểu đồ (M_o). c) Biểu đồ mômen (M)

§3-3. KHUNG KHÔNG GIAN.

Phần tử khung không gian là dầm thẳng có tiết diện không đổi mà trên mặt cắt ngang của nó có thể tồn tại cả lực dọc, momen uốn trong 2 mặt phẳng quán tính chính và momen xoắn. Và tương ứng các bậc tự do chuyển vị đặc trưng cho trạng thái chuyển vị-biến dạng của phần tử dầm 2 điểm nút được thấy như trong hình 3.21. Trong đó hệ trục tọa độ địa phương xyz gồm trục x là trục dầm, y và y là hai trục chính của mặt cắt ngang.



Hình. 3.21. Phần tử khung không gian và các bậc tự do.

Vectơ chuyển vị phần tử 2 điểm nút là:

$$\{q\}_{(e)} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}\}^T$$

Trong đó

q_1 và q_7 : các chuyển vị dọc trục dầm và chỉ gây ra biến dạng dọc trục thanh.

q_4 và q_{10} : các góc xoắn (quanh trục x) và chỉ liên quan đến biến dạng xoắn thanh.

q_2 và q_8 : chuyển vị thẳng theo phương trục y	} chỉ gây ra biến dạng uốn trong mặt phẳng xy .
q_6 và q_{12} : góc xoay trong mặt phẳng xy	
q_3 và q_9 : chuyển vị thẳng theo phương trục z	} chỉ gây ra biến dạng uốn trong mặt phẳng xz
q_5 và q_{11} : góc xoay trong mặt phẳng xz	

Như vậy 12 bậc tự do chuyển vị này chỉ gây ra 4 nhóm biến dạng độc lập nhau và có thể xét riêng rẽ. Nên ma trận cứng phần tử $[K]_{(e)}$ có kích thước (12×12) sẽ được thiết lập từ 4 ma trận con gồm 2 ma trận kích thước (2×2) và 2 ma trận (4×4) như sau:

a) *Biến dạng dọc trục* (do q_1 và q_7) Bài toán này đã được xét ở mục 1 bài 3.1 và ta đã có:

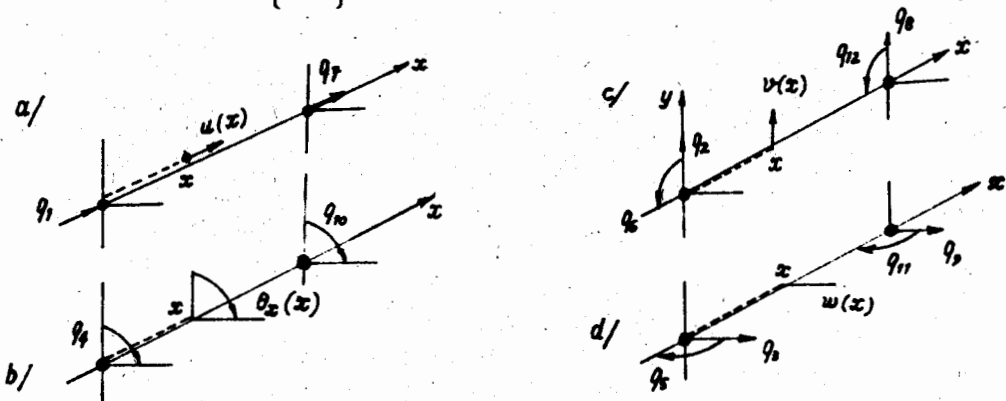
$$[K_a]_{(e)} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ q_7 \end{matrix} \quad (3.31)$$

b) *Biến dạng xoắn* (do q_4 và q_{10}): Do chỉ có 2 bậc tự do nên ta giả thiết hàm góc xoắn $\theta_x(x)$ là hàm xấp xỉ bậc nhất là (hình 3.22b):

$$\theta_x(x) = a_1 + a_2 x \quad (3.32)$$

Và cũng theo nội dung của phép nội suy hàm góc xoắn này được nội suy theo các bậc tự do liên quan là q_4 và q_{10}

$$\theta_x(x) = [N] \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_{10} \end{Bmatrix} = [N] \{q\}_{\text{xoắn}} \quad (3.33)$$



Hình 3.22.

$$\text{trong đó } [N] = \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) \begin{pmatrix} x \\ l \end{pmatrix} \right] \quad (3.34)$$

Như Giáo trình Sức bền vật liệu trường hợp tiết diện thanh là tròn, thì đã biết:

Trên mặt cắt ngang chỉ tồn tại biến dạng góc $\gamma_{yz} = r \frac{d\theta_x}{dx}$ và ứng suất tiếp

$\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$ (Định luật Hooke). Vậy áp dụng các công thức trong chương 2 vào đây, với $\{\epsilon\} = \{\gamma_{yz}\}$, và $\{\epsilon\} = [B] \{q\}_{\text{xoắn}}$

$$\text{với } [B] = \left\{ -\frac{r}{l}, \frac{r}{l} \right\} \quad (r: \text{ khoảng cách từ tâm đến điểm khảo sát})$$

$$\{\sigma\} = \{\tau_{yz}\} \text{ và } \{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$

với $[D] = [G]$ (G : modun đàn hồi trượt của vật liệu)

Cuối cùng ma trận cứng phần tử ứng với các bậc tự do $\{q\}_{\text{xoắn}}$ là:

$$[K_{\text{xoắn}}]_{(e)} = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = 6 \int_0^l dx \int_F \int r^2 dF \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} \\ 1 \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Vậy: } [K_{\text{xoắn}}]_{(e)} = \frac{G J_x}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_4 \\ q_{10} \end{matrix} \quad (3.35)$$

Ở đây J_x là momen quán tính độ cực của mặt cắt ngang.

Trường hợp mặt cắt ngang là chữ nhật kích thước $(a \times b)$ thì J_x được tính bằng $J_x = cab^3$. Trong đó c là hằng số được lấy theo bảng sau và phụ thuộc tỷ số a/b với $a \geq b$

a/b	1	1,5	2,0	3,0	5,0	10,0
c	0,141	0,196	0,229	0,263	0,291	0,312

c) Biến dạng uốn trong mặt phẳng xy (do $\{q\}_{xy} = \{q_2, q_6, q_8, q_{12}\}^T$ (hình 3.22d):
Như đã xét trong mục 1 bài 3.2, ta có:

$$[K_{xy}]_{(e)} = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{đối xứng} & 12 & -6l & \\ & & 4l^2 & \end{bmatrix} \begin{matrix} q_2 \\ q_6 \\ q_8 \\ q_{12} \end{matrix} \quad (3.36)$$

(4 × 4)

d) Biến dạng uốn trong mặt phẳng xz (do $\{q\}_{xz} = \{q_3, q_5, q_9, q_{11}\}^T$): Cũng tương tự như với biến dạng uốn trong mặt phẳng xy. Dễ thấy là (Hình 3.22c):

$$[K_{xz}]_{(e)} = \frac{EJ_y}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{đối xứng} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_3 \\ q_5 \\ q_9 \\ q_{11} \end{matrix} \quad (3.37)$$

(4 × 4)

Vậy: Ma trận cứng phần tử được thiết lập từ 4 ma trận độ cứng (3.31) (3.35) (3.36) (3.37) có được từ việc xét độc lập các nhóm bậc tự do chuyển vị khác nhau. Cuối cùng ta có:

$$[K]_{(e)} = \begin{bmatrix} EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} \\ & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & 0 \\ & & \frac{GJ_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{l} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{4EJ_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4EJ_z}{l} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{l} & 0 \\ & & & & & \frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 \\ & & & & & & & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{GJ_x}{l} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{4EJ_y}{l} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{4EJ_z}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{matrix} \quad (3.38)$$

(12 × 12)

đối xứng

Đây là ma trận độ cứng của phần tử khung không gian trong hệ trục tọa độ địa phương xyz của phần tử. Tuy nhiên nói chung hệ trục tọa độ này là không trùng phương với hệ trục tọa độ tổng thể $x'y'z'$. Do đó trước khi "ghép nối phần tử" phải thực hiện phép chuyển trục tọa độ, hay nói cách khác cần tìm $[K']_e$ là ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể.

Theo công thức (2.26):

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e$$

Trong đó $[T]_e$ là ma trận chuyển hệ trục tọa độ, là ma trận vuông, kích thước (12×12)

$$[T]_e = \begin{bmatrix} [n] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [n] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [n] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [n] \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Ở đây: Các ma trận con là các ma trận vuông (3×3) . Cụ thể,

$$[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[n] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

trong đó l_x, m_x, n_x là cosin chỉ phương của trục x (trục phần tử và cũng là đường ij nối 2 điểm nút đầu và cuối phần tử),

l_y, m_y, n_y là cosin chỉ phương của trục y,

l_z, m_z, n_z là cosin chỉ phương của trục z lấy đối với các trục x', y', z' của hệ tọa độ tổng thể.

$[n]$ được gọi là ma trận biến đổi tọa độ. Nó xác định quan hệ giữa các tọa độ của một điểm bất kỳ theo các hệ trục tọa độ khác nhau. Trong trường hợp đang xét, ta có quan hệ giữa các tọa độ địa phương và các tọa độ tổng thể là:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [n] \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Xây dựng ma trận biến đổi tọa độ $[n]$ theo tọa độ các điểm nút

Để thấy rằng, có thể tìm được nhanh chóng các cosin chỉ phương của trục x theo tọa độ các nút đầu (x'_i, y'_i, z'_i) và nút cuối (x'_j, y'_j, z'_j) của phần tử trong hệ tọa độ tổng thể.

$$l_x = \frac{x'_j - x'_i}{l}, \quad m_x = \frac{y'_j - y'_i}{l}, \quad n_x = \frac{z'_j - z'_i}{l} \quad (3.42)$$

với l là chiều dài phần tử và

$$l = \sqrt{(x'_j - x'_i)^2 + (y'_j - y'_i)^2 + (z'_j - z'_i)^2}$$

Tuy nhiên để xác định thành phần còn lại của ma trận $[n]$ là các cosin chỉ phương các trục y và đối với hệ trục tổng thể $x'y'z'$ thì ta phải lần lượt thực hiện theo hai giai đoạn như sau.

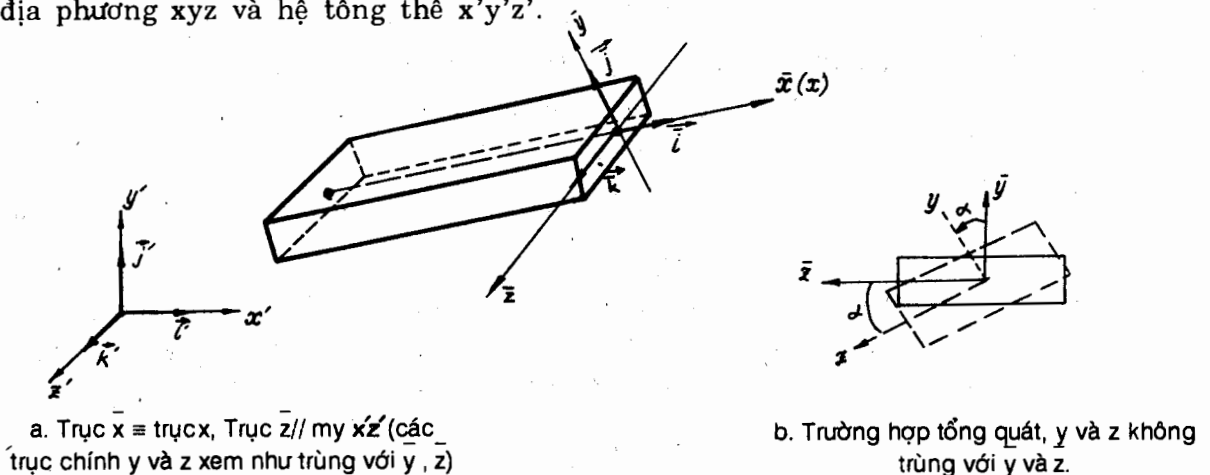
Ở giai đoạn đầu, ta sẽ xây dựng ma trận $[n_1]$ mô tả quan hệ giữa các tọa độ của hệ trục tổng thể $x'y'z'$ và các tọa độ của hệ trục trung gian $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. Mà trong đó trục $\bar{z}$ là song song với mặt phẳng tọa độ $x'z'$ (hình 3.23a), trục $\bar{x}$ là trục phần tử. Khi đó.

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = [n_1] \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Trong giai đoạn sau, ta tìm ma trận $[n_2]$ biểu diễn quan hệ giữa các tọa độ của hệ trục trung gian $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ và hệ trục địa phương xyz của phần tử (có các trục y và z là các trục chính)

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [n_2] \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Ở đây có thể tưởng tượng rằng hệ trục địa phương xyz nhận được bằng cách quay hệ trục trung gian $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ xung quanh trục $\bar{x}$ một góc α nào đó (hình 3.23b). Như vậy sau 2 bước này ta tìm được ma trận $[n]$ xác định quan hệ giữa các tọa độ địa phương xyz và hệ tổng thể $x'y'z'$.



Hình 3.23. Các hệ tọa độ tổng thể và địa phương và các vectơ đơn vị của chúng.

$$[n] = [n_2] [n_1] \quad (3.45)$$

Từ hình 3.23a, các cosin chỉ phương của trục $\bar{x}$ cũng là cosin chỉ phương của trục x phần tử như đã xác định ở (3.42). Hay.

$$\begin{aligned} l_{\bar{x}} &= l_x = \frac{x'_j - x'_i}{l} \\ m_{\bar{x}} &= m_x = \frac{y'_j - y'_i}{l} \\ n_{\bar{x}} &= n_x = \frac{z'_j - z'_i}{l} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Vì trục $\bar{z}$ là song song mặt phẳng xz nên vector đơn vị $\bar{k}$ là vuông góc với vector đơn vị $\bar{j}$ và cũng vuông góc với vector đơn vị $\bar{l}$, từ đó chúng ta có:

$$\bar{k} = \frac{\bar{l} \times \bar{j}}{||\bar{l} \times \bar{j}||} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \bar{i}' & \bar{j}' & \bar{k}' \\ l_x & m_x & n_x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{d} (-\bar{i}' n_x + \bar{k}' l_x) \quad (3.47)$$

$$\text{Trong đó: } d = \sqrt{l_x^2 + n_x^2} \quad (3.48)$$

Vậy, từ (3.47) ta tìm được các cosin chỉ phương của trục $\bar{z}$ đối với hệ trục tổng thể $x'y'z'$ là:

$$l_{\bar{z}} = -\frac{n_x}{d}, \quad m_{\bar{z}} = 0, \quad n_{\bar{z}} = \frac{l_x}{d} \quad (3.49)$$

Để tìm các cosin chỉ phương của trục $\bar{y}$, chúng ta sử dụng điều kiện là trục $\bar{y}$ (có vector đơn vị là $\bar{j}$) là vuông góc với trục x ($\bar{i}$) và trục z ($\bar{k}$). Do đó ta có thể biểu diễn $\bar{j}$ như tích của 2 vector $\bar{k}$ và $\bar{i}$ như sau.

$$\bar{j} = \bar{k} \bar{i} = \begin{bmatrix} \bar{i}' & \bar{j}' & \bar{k}' \\ l_{\bar{z}} & m_{\bar{z}} & n_{\bar{z}} \\ l_x & m_x & n_x \end{bmatrix}$$

Sử dụng (3.46), (3.49) ta có:

$$\bar{j} = \frac{1}{d} [\bar{i}' (-l_x m_x) - \bar{j}' (-n_x^2 - l_x^2) + \bar{k}' (-m_x n_x)]$$

Vậy các cosin chỉ phương của trục $\bar{y}$ là:

$$\begin{aligned} l_{\bar{y}} &= -\frac{l_x m_x}{d} \\ m_{\bar{y}} &= \frac{n_x^2 + l_x^2}{d} \\ n_{\bar{y}} &= -\frac{m_x n_x}{d} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Và ma trận $[n_1]$ được xác định như dưới đây

$$[n_1] = \begin{bmatrix} l_x^- & m_x^- & n_x^- \\ l_y^- & m_y^- & n_y^- \\ l_z^- & m_z^- & n_z^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ -(l_x m_x)/d & (l_x^2 + n_x^2)/d & -(m_x n_x)/d \\ -n_x/d & 0 & l_x/d \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

trong đó l_x, m_x, n_x đã được xác định bởi (3.42) và d bởi (3.48).

Để tìm $[n_2]$ ta chỉ cần nhớ rằng khi các trục địa phương xyz của phần tử là bất kỳ thì phép xoay quanh trục x góc α sẽ cho ta biểu diễn quan hệ giữa 2 hệ trục xyz và hệ trục $x'y'z'$ như sau:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Hay, ta có:

$$[n]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Vậy ma trận biến đổi tọa độ $[n]$ là đã được xác định, bằng cách sử dụng (3.51) và (3.52). Và

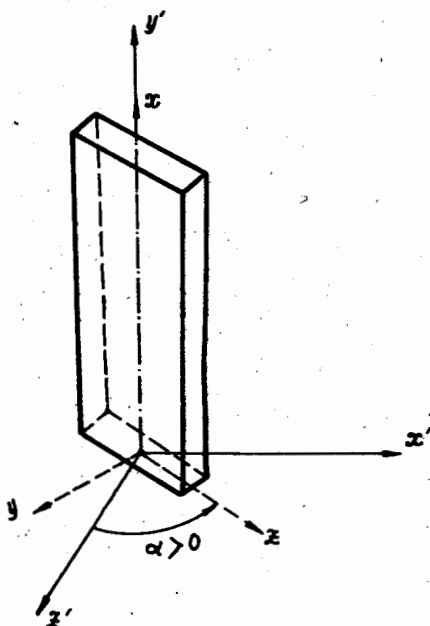
$$[n] = [n_1][n_2]$$

Chú ý:

1. Nếu $\alpha = 0$ thì ma trận $[n_2]$ sẽ trở thành ma trận đơn vị.

2. Khi phần tử thanh đang xét có phương thẳng đứng, tức là khi trục x (hay $\bar{x}$) là trùng với trục tổng thể y' thì cosin chỉ phương của nó là.

$$l_x = 0, m_x = 1, n_x = 0$$



Hình 3.24. Phần tử thẳng đứng và các hệ trục tọa độ.

thì giá trị của d trong (3.51) là bằng 0. Điều này làm nhiều thành phần trong ma trận $[n_1]$ là không xác định. Vậy việc xác định ma trận $[n]$ như trên là không thích hợp nữa.

Tuy nhiên, trường hợp này lại dễ dàng xác định được ma trận $[n]$. Nếu gọi α là góc giữa các trục z' và z và nằm trong mặt phẳng nằm ngang $x'z'$ (α là dương khi quay từ z' đến z là ngược chiều kim đồng hồ (Hình 3.24). Cũng dẫn giải như trên ta sẽ nhận được ma trận $[n]$ như sau:

$$[n] = \begin{bmatrix} 0 & m_x & 0 \\ -m_x \cos \alpha & 0 & m_x \sin \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Ở đây $m_x = 1$ trong trường hợp này.



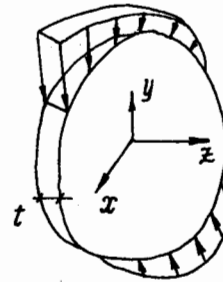
Chương 4

Bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi

§4.1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN PHẪNG CỦA LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

1. Bài toán ứng suất phẳng

Như đã biết trong giáo trình lý thuyết đàn hồi, hay như phần tóm tắt trong chương 1 của giáo trình này, vật thể dạng tấm mỏng khi chịu tải trọng như hình (4.1) thì mọi điểm của nó đều ở trạng thái ứng suất phẳng. Khi đó trạng thái ứng suất - biến dạng - chuyển vị mọi điểm được biểu diễn bởi các vectơ sau đây:



Hình 4.1. Tấm mỏng trong trạng thái ứng suất phẳng.

vectơ ứng suất: $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$

vectơ biến dạng: $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \sigma_{xy}\}^T$

vectơ chuyển vị: $\{u\} = \{u, v\}^T$

Các thành phần trong các vectơ này chỉ là hàm của 2 biến số độc lập x, y .

Phương trình định luật Hooke ở dạng ngược là:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}.$$

trong đó ma trận các hằng số đàn hồi $[D]$ nên dùng trong dạng sau

$$[D] = C_1 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Ở đây, trường hợp vật liệu là đẳng hướng, thì

$$d_{11} = d_{22} = 1; \quad d_{12} = d_{21} = C_2; \quad d_{33} = \frac{1 - C_2}{2}$$

$$\text{với} \quad C_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{và} \quad C_2 = \nu \quad (4.2)$$

(E - momen đàn hồi Young, ν là hệ số Poisson)

Trường hợp vật liệu là trục hướng, thì

$$\begin{aligned} d_{11} &= 1; & d_{22} &= \frac{E_y}{E_x}, & d_{12} &= \nu_{yx} \\ d_{21} &= \frac{E_y}{E_x} \nu_{xy}; & d_{33} &= \frac{G}{C_1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{với} \quad C_1 = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}$$

trong đó E_x , ν_{xy} hoặc E_y , ν_{yx} lần lượt là momen đàn hồi Young và hệ số Poisson khi chịu ứng suất theo một phương x hoặc y. G là modun đàn hồi trượt.

2. Bài toán biến dạng phẳng.

Như đã nói ở chương 1, nếu vật thể có hình lăng trụ dài vô hạn và chịu tải trọng phân bố không thay đổi theo chiều dài lăng trụ, thí dụ như đập trọng lực trong hình 4.2. Khi đó, nếu chọn trục z là trục lăng trụ, thì mọi điểm của lăng trụ ở trạng thái biến dạng phẳng và vectơ biến dạng là:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

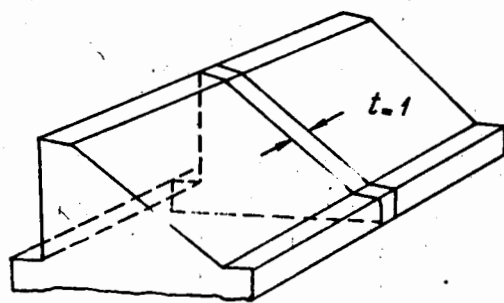
$$\text{Vectơ chuyển vị } \{u\} = \{u, v\}^T$$

So với bài toán ứng suất phẳng, nếu bỏ qua sự khác biệt cụ thể đối với thành phần ứng suất và biến dạng theo phương z, thì các phương trình của 2 bài toán này rất giống nhau. Sự khác biệt chỉ có ở nội dung các thành phần của ma trận các hằng số đàn hồi [D] trong công thức định luật Hooke.

Cụ thể, với vật liệu là đẳng hướng các giá trị C_1 và C_2 trong ma trận [D] được xác định theo các công thức sau.

$$C_1 = \frac{(1 - \nu) E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad C_2 = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (4.4)$$

Do đó ta có thể thấy rằng trong cả 2 bài toán ứng suất phẳng và bài toán biến



Hình 4.2. Đập trọng lực

dạng phẳng trường chuyển vị được xác định duy nhất bởi 2 thành phần chuyển vị u và v theo 2 phương x và y của hệ tọa độ vuông góc. Các đại lượng này và cả các ứng suất, biến dạng thành phần đều chỉ là hàm của 2 tọa độ điểm x, y nên bài toán là bài toán 2 chiều. Ta có thể gọi chung 2 bài toán này là bài toán phẳng của LTDH.

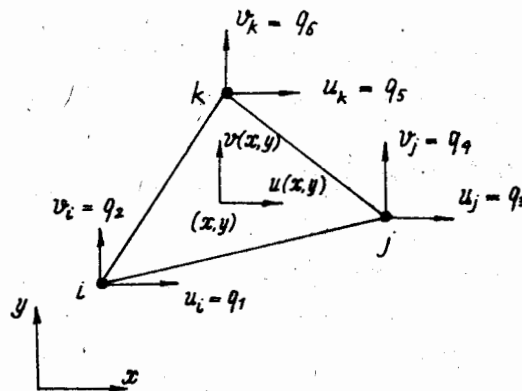
Khi giải bài toán phẳng bằng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình tương thích, vật thể được rời rạc hóa bằng một tập hợp hữu hạn các phần tử phẳng liên kết với nhau tại một số xác định các điểm nút. Mỗi nút có 2 bậc tự do là 2 thành phần chuyển vị của nút đó theo 2 phương x và y . Số lượng và hình dạng các phần tử ảnh hưởng trực tiếp đến kết quả tính toán. Dạng phần tử thường dùng là phần tử dạng tam giác, tứ giác,...

Chương này chủ yếu trình bày phần tử dạng tam giác, chữ nhật với các hàm xấp xỉ đơn giản nhất.

§4.2. BÀI TOÁN PHẪNG VỚI PHẦN TỬ DẠNG TAM GIÁC

1. Các hàm dạng

Xét phần tử dạng tam giác như hình vẽ 4.3. Đây là phần tử có 3 điểm nút i, j, k là các đỉnh của tam giác. Mỗi nút có hai bậc tự do là 2 thành phần chuyển vị của nút đó theo hai phương x và y . Tập hợp các bậc tự do của cả 3 nút này là vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ dưới đây.



Hình 4.3. Phần tử tam giác và các chuyển vị nút của nó.

$$\begin{aligned} \{q\}_e &= \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k\}^T \\ &= \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6\}^T \end{aligned} \quad (4.5)$$

Do vectơ $\{q\}_e$ chỉ có 6 thành phần, để bảo đảm việc nội suy các hàm xấp xỉ của chuyển vị theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$, vectơ các thông số $\{a\}$ (vectơ tọa độ tổng quát) của đa thức xấp xỉ cũng chỉ gồm 6 thành phần

$$\{a\} = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6\}^T \quad (4.6)$$

Khi đó, theo tam giác Pascal ở chương 2, trường chuyển vị chỉ có thể là tuyến tính, tức là vectơ chuyển vị của 1 điểm bất kỳ có tọa độ (x, y) thuộc phần tử gồm 2 thành phần chuyển vị được xem là các hàm xấp xỉ tuyến tính như sau:

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y \\ a_4 + a_5x + a_6y \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\text{Hay } \{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\text{Gọn hơn } \{\underline{u}\}_e = [F(x, y)] \{a\} \quad (4.9)$$

$$\text{Ở đây: } [F(x, y)] = \begin{bmatrix} [P(x, y)] & [0] \\ [0] & [P(x, y)] \end{bmatrix}$$

với $[P(x, y)]$ là ma trận các đơn thức

$$[P(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Theo tư tưởng cơ bản của PPPTHH với mô hình tương thích, bằng việc thực hiện đồng nhất chuyển vị nút với giá trị của hàm chuyển vị đã được xấp xỉ hóa thành các hàm tuyến tính (4.7) tại chính các nút phần tử, ta có thể biểu diễn được vectơ các tham số $\{a\}$ theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$. Thật vậy, sử dụng (4.5), (4.9) thực hiện đồng nhất.

$$\{q\}_e = \left\{ \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{\text{nút } i} \right. \left. \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{\text{nút } j} \right. \left. \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{\text{nút } k} \right\} \equiv \begin{bmatrix} [F(x_i, y_i)] \\ [F(x_j, y_j)] \\ [F(x_k, y_k)] \end{bmatrix} \{a\} \quad (4.11)$$

Trong đó (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_k, y_k) lần lượt là các tọa độ các nút i, j, k của phần tử đang xét trong hệ tọa độ đã cho. Sử dụng tiếp (4.8) hoặc (4.9), (4.10), ta có

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\text{Hay } \{q\}_e = [A] \{a\} \quad (4.13)$$

Từ (4.12) có thể thấy ma trận $[A]$ là ma trận vuông (6×6) chỉ chứa các tọa độ các nút. Người ta đã chứng minh được rằng ma trận này tồn tại nghịch đảo. Vậy từ (4.13) ta biểu diễn được vectơ các thông số $\{a\}$ qua vectơ chuyển vị nút phần tử

$\{q\}_e$

$$\{a\} = [A]^{-1} \{q\}_e \quad (4.14)$$

Với

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_j y_k - x_k y_j & 0 & x_k y_i - x_i y_k & 0 & x_i y_j - y_i x_j & 0 \\ y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i & 0 \\ 0 & x_j y_k - x_k y_j & 0 & x_k y_i - x_i y_k & 0 & x_i y_j - y_i x_j \\ 0 & y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Trong đó

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (x_j y_k - x_k y_j + x_k y_i - x_i y_k + x_i y_j - x_j y_i)$$

A là diện tích hình tam giác có 3 đỉnh là 3 nút i, j, k của phần tử.

$$\text{Hay } [A]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ 0 & y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_i - x_j \\ y_{ij} &= y_i - y_j \quad (i, j, k) \\ a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i \quad (i \rightarrow j \rightarrow k) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Thay (4.14) vào (4.8) ta có:

$$\{\underline{u}\}_e = [F(x,y)] [A]^{-1} \{q\}_e$$

$$\text{Hay: } \{\underline{u}\}_e = [N(x,y)] \{q\}_e \quad (4.18)$$

Trong đó ma trận $[N(x,y)]$ là ma trận các hàm dạng hay còn gọi là các hàm nội suy. Trong trường hợp đang xét, các hàm này đều là các hàm tuyến tính.

$$\begin{matrix} [N(x,y)] & = & [F(x,y)] & [A]^{-1} \\ (2 \times 6) & & (2 \times 6) & (6 \times 6) \end{matrix}$$

Thực hiện nhân ma trận

$$[N(x, y)]_{(2 \times 6)} = \begin{bmatrix} N_i(x, y) & 0 & N_j(x, y) & 0 & N_k(x, y) & 0 \\ 0 & N_i(x, y) & 0 & N_j(x, y) & 0 & N_k(x, y) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\text{Với } \begin{cases} N_i(x, y) = \frac{1}{2A} [y_{jk}(x - x_k) + x_{kj}(y - y_k)] \\ N_j(x, y) = \frac{1}{2A} [y_{ki}(x - x_i) + x_{ik}(y - y_i)] \\ N_k(x, y) = \frac{1}{2A} [y_{ij}(x - x_j) + x_{ji}(y - y_j)] \end{cases} \quad (4.20)$$

Hay gọn hơn:

$$\begin{cases} N_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + y_{jk}x + x_{kj}y) \\ N_j(x, y) = \frac{1}{2A} (a_j + y_{ki}x + x_{ik}y) \\ N_k(x, y) = \frac{1}{2A} (a_k + y_{ij}x + x_{ji}y) \end{cases} \quad (4.21)$$

Nhận xét:

1. Các hàm dạng $N_i(x, y)$ (với i, j, k) có giá trị bằng 1 tại nút i có tọa độ (x_i, y_i) và bằng 0 tại các nút j, k ($\neq i$)

Thật vậy: Tại nút $i (x_i, y_i)$: Hàm N_i có giá trị

$$\begin{aligned} N_i(x_i, y_i) &= \frac{1}{2A} (a_i + y_{jk}x_i + x_{kj}y_i) \\ &= \frac{1}{2A} [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x_i + (x_k - x_j)y_i] \\ &= \frac{1}{2A} [x_j y_k - x_k y_j + x_i y_j - x_i y_k + x_k y_i - x_j y_i] = \frac{2A}{2A} = 1 \end{aligned}$$

Tại nút $j (x_j, y_j)$: Hàm N_i có giá trị

$$\begin{aligned} N_i(x_j, y_j) &= \frac{1}{2A} (a_i + y_{jk}x_j + x_{kj}y_j) \\ &= \frac{1}{2A} [(x_j y_k - x_k y_j) + (x_j y_j - x_j y_k) + (x_k y_j - x_j y_i)] = 0 \end{aligned}$$

2. Tổng các hàm dạng là bằng 1, hay

$$\sum N_i(x, y) = N_i(x, y) + N_j(x, y) + N_k(x, y) = 1$$

Thật vậy:

$$\sum N_i(x, y) = \frac{1}{2A} [(a_i + a_j + a_k) + (y_{jk} + y_{ki} + y_{ij})x + (x_{kj} + x_{ik} + x_{ji})y]$$

$$\text{Mà: } y_{ik} + y_{ki} + y_{ij} = y_j - y_k + y_k - y_i + y_i - y_j = 0$$

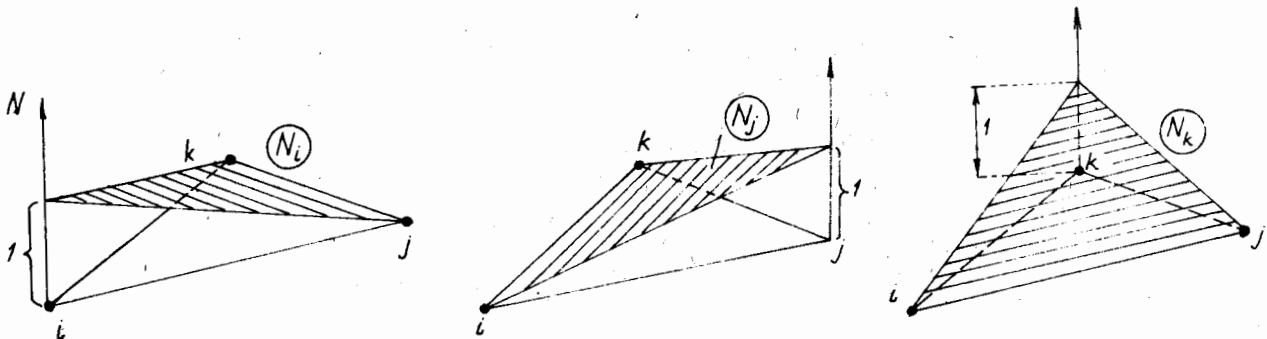
$$x_{kj} + x_{ik} + x_{ji} = x_k - x_j + x_i - x_k + x_j - x_i = 0$$

$$a_i + a_j + a_k = x_j y_k - x_k y_j + x_k y_i - x_i y_k + x_i y_j - x_j y_i = 2A.$$

$$\text{Vậy: } \sum N_i(x,y) = N_i(x,y) + N_j(x,y) + N_k(x,y) = \frac{2A}{2A} = 1.$$

Các tính chất trên cũng là các tính chất chung của các hàm nội suy Lagrange trong bài toán 2 chiều.

3. Đồ thị các hàm dạng (4.20) (hay (4.21)) biểu diễn các mặt phẳng như hình vẽ 4.4 và dễ dàng vẽ được dựa vào nhận xét 1 vừa nêu ở trên.

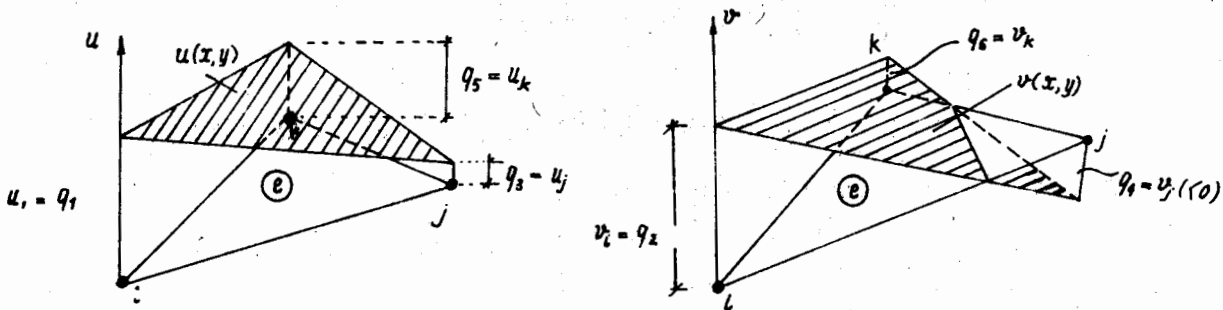


Hình 4.4. Đồ thị biểu diễn các hàm dạng N_i, N_j, N_k .

4. Theo (4.18) các thành phần chuyển vị theo các phương x, y của các điểm thuộc phần tử là:

$$\text{Hay } \begin{cases} u(x,y) = q_1 N_i(x,y) + q_3 N_j(x,y) + q_5 N_k(x,y) \\ v(x,y) = q_2 N_i(x,y) + q_4 N_j(x,y) + q_6 N_k(x,y) \\ u(x,y) = u_i N_i(x,y) + u_j N_j(x,y) + u_k N_k(x,y) \\ u(x,y) = v_i N_i(x,y) + v_j N_j(x,y) + v_k N_k(x,y) \end{cases}$$

Và biểu đồ biểu diễn chuyển vị $(u), (v)$ có thể thấy ở hình 4.5.



Hình 4.5. Đồ thị biểu diễn các hàm chuyển vị u và v (giả sử $v_j < 0$)

Cũng như với chuyển vị, các thành phần biến dạng của phần tử cũng được biểu diễn theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$

$$\{\epsilon\}_e = [B]\{q\}_e \quad (4.22)$$

Với ma trận biến dạng $[B]$ được xác định theo (2.8)

$$[B] = \begin{bmatrix} [v] & [N(x,y)] \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$(3 \times 6) \quad (3 \times 2) \quad (2 \times 6)$

Ở đây, trong bài toán phẳng, ma trận $[v]$ được cụ thể hóa là

$$[v] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

Thực hiện đạo hàm, dễ dàng nhận được:

$$[B]_e = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & -y_{ik} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & -x_{jk} & 0 & x_{ik} & 0 & -x_{ij} \\ -x_{jk} & y_{jk} & x_{ik} & -y_{ik} & -x_{ij} & y_{ij} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Cũng dễ nhận thấy rằng do các thành phần của ma trận $[B]$ là các hằng số nên theo (4.22) các thành phần biến dạng và kéo theo đó là cả các thành phần ứng suất có giá trị không đổi trong phạm vi mỗi phần tử.

2. Ma trận độ cứng phần tử.

Như chương 2 đã trình bày, ma trận độ cứng phần tử được xác định bởi (2.16)

$$[K]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

Vì độ dày t của tấm là không đổi, nên tích phân trên dễ dàng thực hiện vì các ma trận $[B]$ và $[D]$ chỉ gồm các hằng số. Do đó có thể viết.

$$[K]_e = [B]^T [D] [B] t \int_A dA = tA [B]^T [D] [B]$$

Thực hiện tính toán, ta có

$$[K]_e = \frac{C_1 t}{4A} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

đối xứng

Trong đó các thành phần k_{ij} có giá trị cho trong bảng sau.

$k_{11} = y_{jk}^2 + \lambda x_{jk}^2$	$k_{33} = y_{ik}^2 + \lambda x_{ik}^2$
$k_{12} = -C_2 x_{jk} y_{jk} - \lambda y_{jk} x_{jk}$	$k_{34} = -C_2 x_{ik} y_{ik} - \lambda x_{ik} y_{ik}$
$k_{13} = -y_{ik} y_{jk} - \lambda x_{jk} x_{ik}$	$k_{35} = -y_{ik} y_{ij} - \lambda x_{ik} x_{ij}$
$k_{14} = C_2 x_{ik} y_{jk} + \lambda y_{kj} x_{jk}$	$k_{36} = C_2 x_{ij} y_{ik} + \lambda x_{ik} y_{ij}$
$k_{15} = y_{jk} y_{ij} + \lambda x_{jk} x_{ij}$	$k_{44} = x_{ik}^2 + \lambda y_{ik}^2$
$k_{16} = -C_2 y_{jk} x_{ij} - \lambda x_{jk} y_{ij}$	$k_{45} = C_2 x_{ik} y_{ij} + \lambda y_{ik} x_{ij}$
$k_{22} = x_{jk}^2 + \lambda y_{jk}^2$	$k_{46} = -x_{ik} x_{ij} - \lambda y_{ik} y_{ij}$
$k_{23} = C_2 x_{jk} y_{ik} + \lambda x_{ik} y_{jk}$	$k_{55} = y_{ij}^2 + \lambda x_{ij}^2$
$k_{24} = -x_{jk} x_{ik} - \lambda y_{jk} y_{ik}$	$k_{56} = -C_2 x_{ij} y_{ij} - \lambda x_{ij} y_{ij}$
$k_{25} = -C_2 x_{jk} y_{ij} - \lambda y_{jk} x_{ij}$	$k_{66} = x_{ij}^2 + \lambda y_{ij}^2$
$k_{26} = x_{ij} x_{jk} + \lambda y_{jk} y_{ij}$	

Ở đây: $\lambda = \frac{1 - C_2}{2}$ (4.26)

trong đó C_1, C_2 được xác định theo (4.2) nếu bài toán là ứng suất phẳng, hoặc theo (4.4) nếu bài toán là biến dạng phẳng.

3. Vectơ tải phần tử $\{P\}_e$

Vectơ tải phần tử được xác định theo (2.17) trong trường hợp tổng quát. Với các trường hợp cụ thể có thể được tính sẵn như sau:

- Do lực thể tích $\{g\} = \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix}$ (g_x, g_y là không đổi)

Sử dụng (2.17), ta có vectơ tải phần tử do lực thể tích là

$$\{P_g\}_e = \int_{V_e} [N(x,y)]^T \{g\} dV$$

$$\{P_g\}_e = \int_A \begin{Bmatrix} N_i g_x \\ N_i g_y \\ N_j g_x \\ N_j g_y \\ N_k g_x \\ N_k g_y \end{Bmatrix} t dA = \frac{At}{3} \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_x \\ g_y \\ g_x \\ g_y \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

trong đó A là diện tích tam giác $i j k$; còn t là bề dày tấm.

Cũng nên biết rằng trong quá trình tích phân ta đã sử dụng các tích phân sau.

$$\int_A x dA = x_c A \text{ và } \int_A y dA = y_c A$$

trong đó x_c, y_c là tọa độ của trọng tâm C của hình tam giác i j k.

Và dễ thấy rằng:

$$x_c = \frac{1}{3} (x_i + x_j + x_k)$$

$$y_c = \frac{1}{3} (y_i + y_j + y_k)$$

- Vectơ tải phân tử do lực mặt $\{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}$

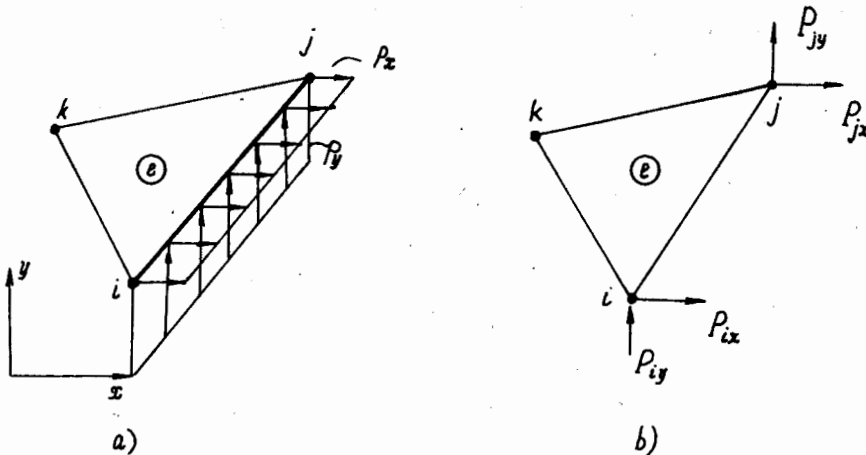
Giả sử có lực mặt phân bố đều trên biên (thí dụ trên cạnh i j của phần tử) (hình 4.6) với các thành phần p_x và p_y có giá trị không đổi.

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}$$

Sử dụng (2.17), (4.19), (4.21) và thực hiện tích phân ta có:

$$\{P_p\}_e = \int_S [N(x,y)]^T \{p\} dS$$

$$\text{Hay } \{P_p\}_e = \int_{L_{ij}} \begin{Bmatrix} N_i p_x \\ N_i p_y \\ N_j p_x \\ N_j p_y \\ N_k p_x \\ N_k p_y \end{Bmatrix} t ds = \frac{t L_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{jx} \\ P_{jy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$



Hình 4.6. Lực mặt tác dụng trên cạnh biên ij của phần tử và các thành phần của $\{P_p\}_e$

trong đó: L_{ij} : chiều dài cạnh biên ij (cạnh có lực $\{p\}$ tác dụng)

t : chiều dày phần tử

$$P_{ix} = P_{jx} = p_x \frac{t L_{ij}}{2}$$

$$P_{iy} = P_{jy} = p_y \frac{t L_{ij}}{2}$$

Chú ý rằng, trong trường hợp này, do tải trọng mặt chỉ tác dụng trên cạnh ij nên 2 thành phần cuối của $\{P\}_e$ là $P_{kx} = P_{ky} = 0$. Điều này là dễ thấy bởi. $N_k(x,y) = 0$ trên cạnh ij (xem biểu đồ (N_k) trên hình 4.4)

- Vectơ tải phần tử do biến dạng ban đầu được xác định theo (2.17)

$$\{P_\epsilon\}_e = \int_{V_e} [B]^T [D] \{\epsilon_0\}_e dV$$

Trường hợp do nhiệt độ: $\{\epsilon_0\}_e = \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\{P_\epsilon\}_e = [B]^T [D] \{\epsilon_0\}_e tA \quad (4.29)$$

Trường hợp vật liệu đẳng hướng:

$$\{P_\epsilon\}_e = \frac{E \alpha t T}{2(1-\nu)} \begin{Bmatrix} y_{jk} \\ -x_{jk} \\ -y_{ik} \\ x_{ik} \\ y_{ij} \\ -x_{ij} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

trong đó α : hệ số giãn nở vì nhiệt của vật liệu

T : độ biến thiên của nhiệt độ.

4. Ma trận tính ứng suất:

Như đã thấy ở trên, do hàm chuyển vị là tuyến tính nên biến dạng sẽ là hằng số trong mỗi phần tử. Từ đó cũng thấy rằng ứng suất cũng là không đổi trong từng phần tử. Vectơ ứng suất được biểu diễn qua vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ như sau:

$$\{\sigma\}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_e = [D] \{\epsilon\}_e = [D] [B] \{q\}_e$$

Vậy: $\{\sigma\}_e = [S]_e \{q\}_e \quad (4.31)$

Ở đây $[S]_e$ là ma trận tính ứng suất và

$$[S]_e = [D] [B]$$

Thực hiện nhân ma trận, ta có:

$$[S]_e = \frac{C_1}{2A} \begin{bmatrix} y_{jk} & -C_2 x_{jk} & -y_{ik} & y_{ij} & C_2 x_{ik} & -C_2 x_{ij} \\ C_2 y_{jk} & -x_{jk} & -C_2 y_{ik} & C_2 y_{ij} & x_{ik} & -x_{ij} \\ -\lambda x_{jk} & \lambda y_{jk} & \lambda x_{ik} & -\lambda x_{ij} & -\lambda y_{ik} & -\lambda y_{ij} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

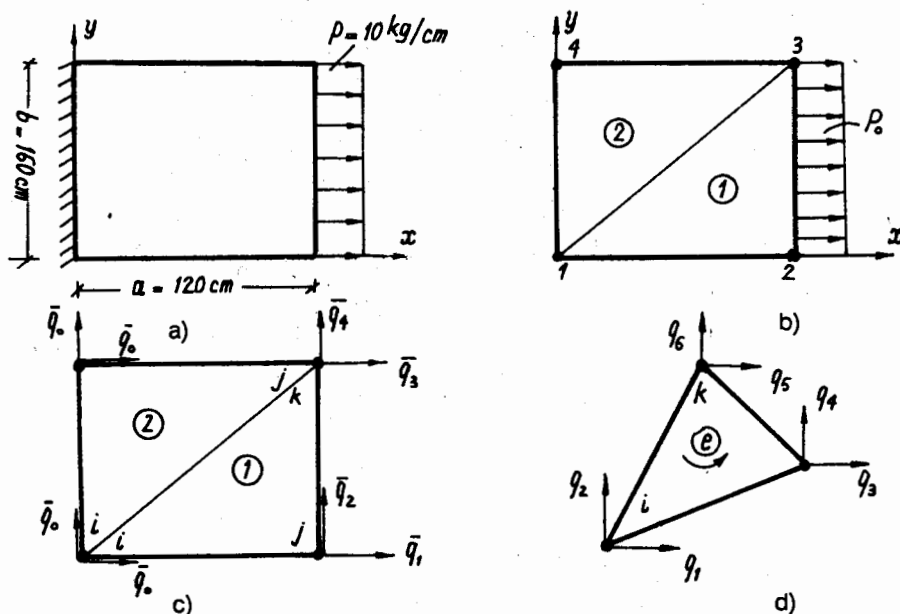
trong đó C_1, C_2 là các hằng số đàn hồi xác định theo (4.2), hay (4.4)

còn: $\lambda = \frac{1 - C_2}{2}$

A: Diện tích tam giác ijk .

5. Thí dụ:

Tìm chuyển vị tại các đỉnh và ứng suất trong tấm phẳng có kích thước và chịu tải trọng như hình 4.7a. Biết vật liệu là đẳng hướng có mô đun đàn hồi Young $E = 3 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, hệ số Poisson $\nu = 0,3$. Tấm có bề dày $t = 0,36 \text{ cm}$



Hình 4.7a. Sơ đồ kết cấu và tải trọng; b. Sơ đồ rời rạc hóa tấm (nút và phần tử); c. Các chuyển vị nút tổng thể $\{\bar{q}\}$ (với $\bar{q}_0 = 0$); d. Các chuyển vị nút phần tử $\{q\}$.

Giải

1. Rời rạc hóa kết cấu: Chia tấm thành 2 phần tử tam giác bằng 4 điểm nút. Đánh số nút và phần tử như hình vẽ 4.7b.

Mỗi nút có 2 bậc tự do là 2 thành phần chuyển vị theo phương x và y . Tập

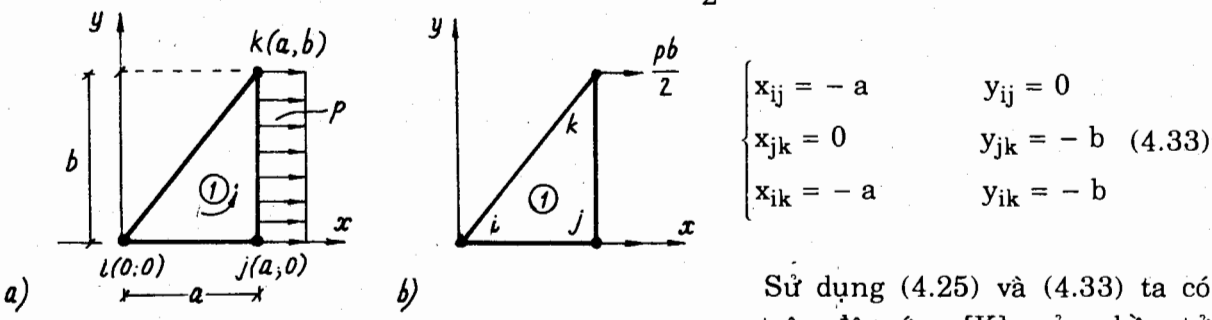
hợp 8 bậc tự do này của cả 4 nút là vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{q\}$. Tuy nhiên do các nút 1 và 4 là gắn cứng không có chuyển vị nên để đơn giản sau này ta gọi các chuyển vị nút thành phần của các nút này là q_0 và $q_0 = 0$. Các bậc tự do bằng 0 này được đánh số 0 trong hệ thống mã số tổng thể. Nói cách khác, ta gọi lần lượt các bậc tự do khác không là q_1, q_2, q_3, q_4 còn các bậc tự do bằng 0 là q_0 như hình vẽ 4.7c.

Thiết lập ma trận chỉ số $[b]$. Dựa vào mối liên hệ giữa các bậc tự do của $\{q\}_e$ của phần tử mẫu hình 4.7d và các bậc tự do tổng thể ở hình 4.7c ta dễ dàng lập được ma trận chỉ số $[b]$.

Phân tử \ Chỉ số phần tử	Nút i		Nút j		Nút k	
	1	2	3	4	5	6
(1)	0	0	1	2	3	4
(2)	0	0	3	4	0	0

2. Thiết lập các ma trận cứng phần tử $[K]_e$ và vectơ tải phần tử $\{P\}_e$

Với phần tử (1) (hình 4.8): Tính sẵn $A = \frac{ab}{2}$ và theo (4.17):



Hình 4.8. a. Phần tử (1) và các tọa độ nút; b. Các thành phần tải trọng nút khác 0

Sử dụng (4.25) và (4.33) ta có ma trận độ cứng $[K]_1$ của phần tử (1) là:

$$[K]_1 = \frac{C_1 t}{2ab} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ b^2 & 0 & -b^2 & C_2 ab & 0 & -C_2 ab \\ \lambda b^2 & \lambda ab & -\lambda b^2 & -\lambda ab & 0 & 0 \\ b^2 + \lambda a^2 & -\frac{1+C_2}{2} ab & -\lambda a^2 & C_2 ab & 1 & \\ a^2 + \lambda b^2 & \lambda ab & -a^2 & 2 & \\ \text{đối xứng} & \lambda a^2 & 0 & 3 & \\ & & a^2 & 4 \end{bmatrix}$$

Tải trọng phân bố trên cạnh biên jk của phần tử với $\{p\} = \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix}$

Nên dễ thấy rằng các thành phần của vectơ tải khác không được cho trên hình 4.8b là tương ứng các thành phần thứ ba và thứ năm của vectơ tải phần tử $\{P\}_1$. Vậy, có thể viết dễ dàng.

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ pb/2 \\ 0 \\ pb/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Cần giải thích rõ hơn rằng, trong trường hợp tổng quát, có thể lực phân bố tác dụng không chỉ trên một cạnh biên phần tử (như trường hợp bài toán này) mà trên cả các cạnh biên khác của phần tử. Nên ta có thể viết một cách tổng quát là.

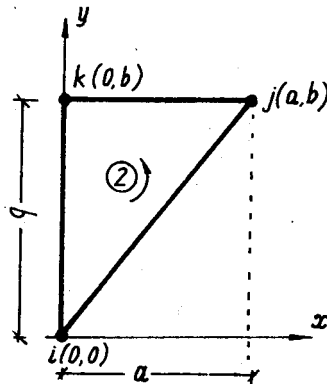
$$\{P\}_e = \{P\}_e^{ij} + \{P\}_e^{jk} + \{P\}_e^{ki}$$

Ở đây $\{P\}_e^{ij}$ là vectơ tải phần tử do lực phân bố trên cạnh biên ij gây ra. Tuy nhiên trong phần tử (1) của bài toán này do tải phân bố chỉ có trên cạnh jk nên

$$\{P\}_e^{ij} = \{P\}_e^{ki} = \{0\}$$

và $\{P\}_e = \{P\}_e^{jk}$ như ta đã làm ở trên.

Với phần tử (2) (hình 4.9): Có $A = \frac{ab}{2}$



Hình 4.9. Phần tử (2)

$$\begin{cases} x_{ij} = -a & y_{ij} = -b \\ x_{jk} = 0 & y_{jk} = 0 \\ x_{ik} = 0 & y_{ik} = -b \end{cases} \quad (4.34)$$

Do không có tải trọng tác dụng nên $\{P\}_2 = 0$ và theo (4.25) và (4.34) ta có

$$[K]_2 = \frac{C_1 t}{2ab} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ \lambda a^2 & 0 & 0 & -\lambda ab & -\lambda a^2 & \lambda ab \\ & a^2 & -C_2 ab & 0 & C_2 ab & -a^2 \\ & & b^2 & 0 & -b^2 & C_2 ab \\ \text{đối} & \text{xúng} & & \lambda b^2 & \lambda ab & -\lambda b^2 \\ & & & & \lambda a^2 + b^2 & -\frac{1+C_2}{2} ab \\ & & & & & a^2 + \lambda b^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

3. Ghép nối phần tử, do đã áp đặt điều kiện biên ngay trong cách đánh số mã tổng thể, nên kết quả nhận được là ma trận cứng tổng thể $[K^*]$ và vector tải tổng thể $\{P^*\}$

$$[K^*] = \frac{C_1 t}{2ab} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \lambda a^2 + b^2 & -\frac{1+C_2}{2} ab & -\lambda a^2 & C_2 ab \\ & a^2 + \lambda b^2 & \lambda ab & -a^2 \\ \text{đối} & \text{xúng} & \lambda a^2 + b^2 & 0 \\ & & & a^2 + \lambda b^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \text{Chỉ số tổng thể}$$

$$\{P^*\} = \frac{pb}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

4. Giải hệ phương trình: $[K^*]\{q^*\} = \{P^*\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{E}{1-\nu^2} = 3,2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\ C_2 = \nu = 0,25 \\ \lambda = \frac{1-C_2}{2} = 0,375 \\ \frac{1+C_2}{2} = 0,625 \end{array} \right.$$

Thay các số liệu vào ta có:

Ta có hệ phương trình để tìm 4 chuyển vị nút chưa biết.

$$10^4 \times \begin{bmatrix} 93,0 & -36,0 & -16,2 & 14,4 \\ & 72,0 & 21,6 & -43,2 \\ \text{đối} & \text{xúng} & 93,0 & 0 \\ & & & 72,0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 800 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Giải ra ta có:

$$\{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{Bmatrix} = 10^{-4} \times \begin{Bmatrix} 11,28 \\ 1,97 \\ 10,10 \\ -1,09 \end{Bmatrix} \text{ cm.}$$

Vậy đã tìm được chuyển vị của các nút 2 và 3.

5. Tìm ứng suất trong mỗi phần tử bằng cách sử dụng (4.31) và (4.32)

$$\{\sigma\}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [S]_e \{q\}_e$$

Sử dụng ma trận chỉ số $[b]$ và $\{\bar{q}\}$ ta dễ dàng xác định được các vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$. Cụ thể.

$$\begin{aligned} \{q\}_1 &= \begin{Bmatrix} \bar{q}_0 & \bar{q}_0 & \bar{q}_1 & \bar{q}_2 & \bar{q}_3 & \bar{q}_4 \end{Bmatrix}^T \\ &= 10^{-4} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 11,28 & 1,97 & 10,10 & -1,09 \end{Bmatrix}^T \text{ (cm)} \\ \{q\}_2 &= \begin{Bmatrix} \bar{q}_0 & \bar{q}_0 & \bar{q}_3 & \bar{q}_4 & \bar{q}_0 & \bar{q}_0 \end{Bmatrix}^T \\ &= 10^{-4} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 10,10 & -1,09 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \text{ cm} \end{aligned}$$

Để tìm vectơ ứng suất của các phần tử, sau khi thay số liệu rồi thực hiện tính toán ta có (chú ý rằng để dễ thấy, các thành phần không cần thiết trong các $[S]_e$ sẽ không cần tính trong thí dụ này).

$$\{\sigma\}_1 = \frac{C_1}{2ab} \begin{bmatrix} - & - & b & 0 & -C_2 a & C_2 a \\ - & - & C_2 b & 0 & -a & a \\ - & - & -\lambda a & \lambda a & \lambda b & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24,49 \\ -14,86 \\ 3,12 \end{Bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

$$\{\sigma\}_2 = \frac{C_1}{2ab} \begin{bmatrix} - & - & b & -b & - & - \\ - & - & C_2 b & -C_2 b & - & - \\ - & - & 0 & \lambda a & - & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29,84 \\ 7,46 \\ -0,82 \end{Bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

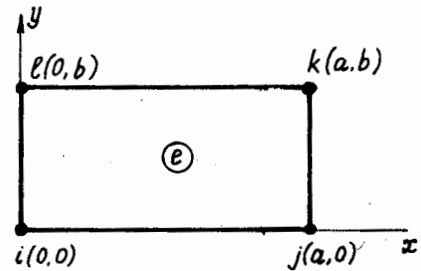
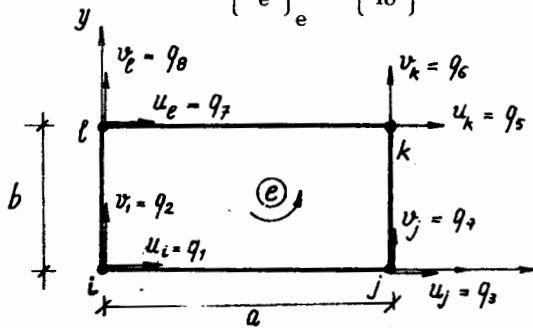
Nhận xét: Kết quả về chuyển vị và cả ứng suất không là đối xứng mặc dù bài toán là đối xứng. Bởi ta đã dùng chỉ hai phần tử tam giác và đã phá hỏng tính đối xứng này. Điều này sẽ được loại trừ khi dùng lưới phần tử dày hơn và đối xứng qua trục đối xứng của tấm, hoặc dùng phần tử chữ nhật.

§4.3. PHẦN TỬ CHỮ NHẬT

Xét phần tử chữ nhật trong mặt phẳng xy như hình vẽ 4.9. Phần tử có bốn điểm nút i, j, k và l là các đỉnh của chữ nhật. Mỗi nút có 2 bậc tự do là 2 thành phần chuyển vị theo phương x và y.

Tập hợp các bậc tự do này là vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ và là.

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_l \\ v_l \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$



Hình 4.9. Phần tử chữ nhật- các bậc tự do của phần tử và các nút.

Hai chuyển vị thành phần của một điểm bất kỳ có tọa độ (x,y) thuộc phần tử được lấy xấp xỉ bởi dạng đa thức song tuyến tính như sau.

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

Ở dạng ma trận:

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Tức là:

$$\{\underline{u}\}_e = [F(x,y)] \{a\} \quad (4.38)$$

với
$$[F(x,y)] = \begin{bmatrix} [P(x,y)] & [0] \\ [0] & [P(x,y)] \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

trong đó ma trận các đơn thức $[P(x,y)]$ là

$$[P(x,y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

và vectơ các tham số $\{a\}$

$$\{a\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8\}^T \quad (4.41)$$

Thực hiện đồng nhất chuyển vị nút và giá trị của hàm xấp xỉ tại các nút để từ đó biểu diễn vectơ các tham số $\{a\}$ theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$.

Sử dụng (4.35), (4.37) hay (4.38) và thay tọa độ các nút cho trong hình 4.9 vào. Ta có

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_e \\ v_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix}$$

Tức là: $\{q\}_e = [A] \{a\} \quad (4.42)$

trong đó $[A]$ là ma trận vuông (8×8) chứa tọa độ các điểm nút ở phương trình trên. $[A]$ có nghịch đảo $[A]^{-1}$ là

$$[A]^{-1} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vậy, từ (4.42) ta có:

$$\{a\} = [A]^{-1}\{q\}_e \quad (4.42)$$

Thay (4.42) vào (4.38), ta biểu diễn được trường chuyển vị $\{u\}_e$ của phần tử theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$, hay nói cách khác, trường chuyển vị $\{u\}_e$ được nội suy qua $\{q\}_e$. Cụ thể là

$$\{u\}_e = [F(x,y)] [A]^{-1}\{q\}_e$$

$$\text{Hay} \quad \{u\}_e = [N(x,y)] \{q\}_e \quad (4.43)$$

Trong đó $[N(x,y)]$ là ma trận các hàm dạng, hay ma trận các hàm nội suy và được xác định.

$$\begin{aligned} [N(x,y)] &= [F(x,y)] [A]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} [A]^{-1} \end{aligned} \quad (4.44)$$

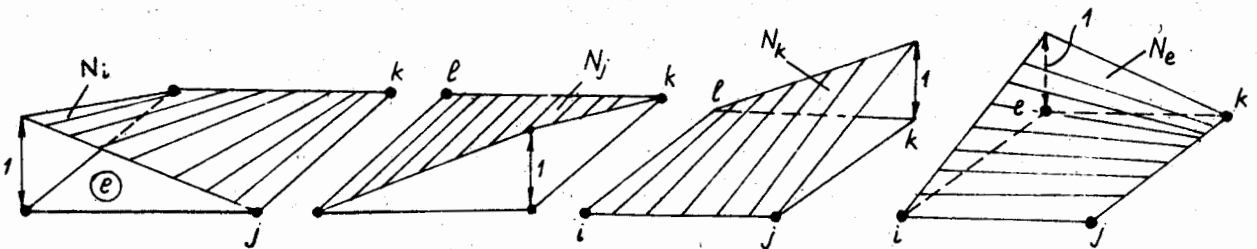
$$\text{Hay:} \quad [N(x,y)] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

(2 × 8)

Với 4 hàm dạng trên là các hàm 2 biến x,y và có dạng

$$\begin{cases} N_i = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ N_j = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ N_k = \frac{xy}{ab} \\ N_l = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \end{cases} \quad (4.46)$$

Các hàm $N_i(x,y)$ trên còn gọi là các hàm nội suy Lagrange song tuyến tính. Đồ thị biểu diễn các hàm này ở hình 4.10. Và từ (4.43) có thể thấy các chuyển vị u và v của phần tử là

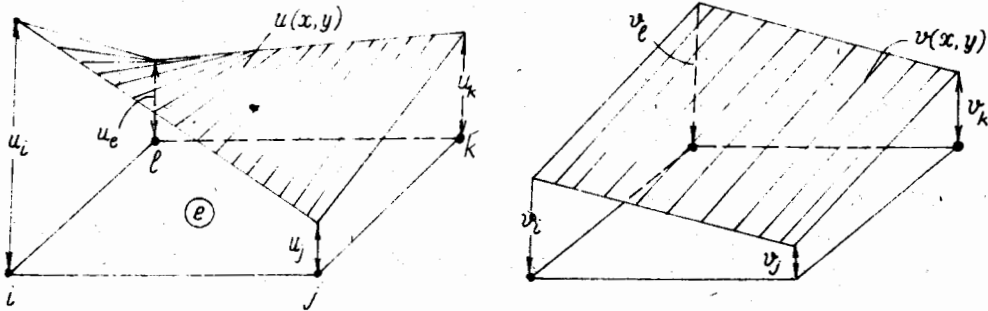


Hình 4.10. Đồ thị các hàm dạng của phần tử chữ nhật 4 điểm nút

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^4 N_j u_j = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k + N_l u_l$$

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^4 N_j v_j = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k + N_l v_l$$

Và đồ thị biểu diễn các trường chuyển vị này có thể thấy như ở hình 4.11.



Hình 4.11. Trường chuyển vị $u(x,y)$ và $v(x,y)$.

Theo (2.11) ta có ma trận tính biến dạng

$$\begin{matrix} [B] & = & [\partial] & [N(x,y)] \\ (3 \times 8) & & (3 \times 2) & (2 \times 8) \end{matrix}$$

Cụ thể:

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l \end{bmatrix}$$

Thực hiện phép đạo hàm đơn giản này ta có:

$$[B] = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} -(b-y) & 0 & b-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & -(a-x) & 0 & -x & 0 & x & 0 & a-x \\ -(a-x) & -(b-y) & -x & (b-y) & x & y & a-x & -y \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Vậy, theo (2.16) có thể tìm được ma trận cứng phần tử $[K]_e$

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV. \quad (4.48)$$

Tuy nhiên việc tích phân trực tiếp sau khi nhân các ma trận trong dấu tích phân như trên sẽ phức tạp. Có thể thực hiện bằng cách sau đây thì đơn giản hơn.

Vì $[B] = [\partial] [N(x,y)]$

Sử dụng (4.44) thì

$$[B] = [\partial] [F(x,y)] [A]^{-1}$$

Hay $[B] = [B'] [A]^{-1} \quad (4.49)$

$$\text{Ở đây: } [B'] = [\partial] [F(x,y)] \quad (4.50)$$

$$(3 \times 8) \quad (3 \times 2) \quad (2 \times 8)$$

Tức là

$$[B'] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$$

Để dàng nhận được

$$[B'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Thay (4.49) vào (4.48), khi đó:

$$[K]_e = \int_{V_e} ([A]^{-1})^T [B']^T [D] [B'] [A]^{-1} dV$$

Vì các ma trận $[A]^{-1}$ và $([A]^{-1})^T$ không chứa biến x, y nên đưa được ra ngoài dấu tích phân. Ta có:

$$[K]_e = ([A]^{-1})^T \left(\int_0^b \int_0^a [B']^T [D] [B'] t dx dy \right) [A]^{-1} \quad (4.52)$$

Sử dụng (4.51) và (4.1), thực hiện phép nhân ma trận trong biểu thức tích phân. Ta có:

$$[B']^T [D] [B'] = C_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & y & 0 & 0 & C_2 & C_2 x \\ & & \lambda & \lambda x & 0 & \lambda & 0 & \lambda y \\ & & & y^2 + \lambda x^2 & 0 & \lambda x & C_2 y & xy(\lambda + C_2) \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{đối} & \text{rỗng} & & \lambda & 0 & \lambda y \\ & & & & & & 1 & x \\ & & & & & & & x^2 + \lambda y^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{trong đó: } \lambda = \frac{1 - C_2}{2}$$

Và tiếp tục thực hiện tích phân

$$[H] = t \int_0^b \int_0^a [B']^T [D] [B'] dx dy.$$

$$[H] = C_1 t ab \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \frac{b}{2} & 0 & 0 & C_2 & \frac{C_2 a}{2} \\ & & \lambda & \frac{\lambda a}{2} & 0 & \lambda & 0 & \frac{\lambda b}{2} \\ & & & \frac{b^2 + \lambda a^2}{3} & 0 & \frac{\lambda a}{2} & \frac{C_2 b}{2} & ab \frac{\lambda + C_2}{4} \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{đối} & \text{xúng} & & & \lambda & 0 & \frac{\lambda b}{2} \\ & & & & & & 1 & \frac{a}{2} \\ & & & & & & & \frac{a^2 + \lambda b^2}{3} \end{bmatrix}$$

Cuối cùng, ta nhận được ma trận cứng của phần tử chữ nhật 4 nút.

$$[K]_e = ([A]^{-1})^T [H] [A]^{-1}$$

$$[K]_e = \frac{C_1 t}{ab} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ & & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ & & \text{đối} & \text{xúng} & & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ & & & & & & k_{77} & k_{78} \\ & & & & & & & k_{88} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

trong đó các k_{ij} được xác định như sau:

$$k_{11} = \frac{b^2 + \lambda a^2}{3}$$

$$k_{33} = k_{11}$$

$$k_{66} = k_{22}$$

$$k_{12} = ab \frac{(\lambda + C_2)}{4}$$

$$k_{34} = k_{16}$$

$$k_{67} = k_{18}$$

$$k_{13} = \frac{\lambda a^2 - 2b^2}{6}$$

$$k_{35} = k_{17}$$

$$k_{68} = k_{24}$$

$$k_{14} = -\frac{\lambda - C_2}{4} ab$$

$$k_{36} = k_{14}$$

$$k_{77} = k_{11}$$

$$k_{15} = -\frac{b^2 + \lambda a^2}{6}$$

$$k_{37} = k_{15}$$

$$k_{78} = k_{16}$$

$$k_{16} = -ab \frac{\lambda + C_2}{4}$$

$$k_{38} = k_{12}$$

$$k_{88} = k_{22}$$

$$k_{17} = \frac{b^2 - 2\lambda a^2}{6}$$

$$k_{44} = k_{22}$$

$$k_{18} = ab \frac{\lambda - C_2}{4}$$

$$k_{45} = k_{18}$$

$$k_{22} = \frac{a^2 + \lambda b^2}{3}$$

$$k_{46} = k_{28}$$

$$k_{23} = k_{18}$$

$$k_{47} = k_{12}$$

$$k_{24} = \frac{a^2 - 2\lambda b^2}{6}$$

$$k_{48} = k_{26}$$

$$k_{25} = k_{16}$$

$$k_{55} = k_{11}$$

$$k_{26} = -\frac{a^2 + \lambda b^2}{6}$$

$$k_{56} = k_{12}$$

$$k_{27} = k_{14}$$

$$k_{57} = k_{13}$$

$$k_{28} = \frac{\lambda b^2 - 2a^2}{6}$$

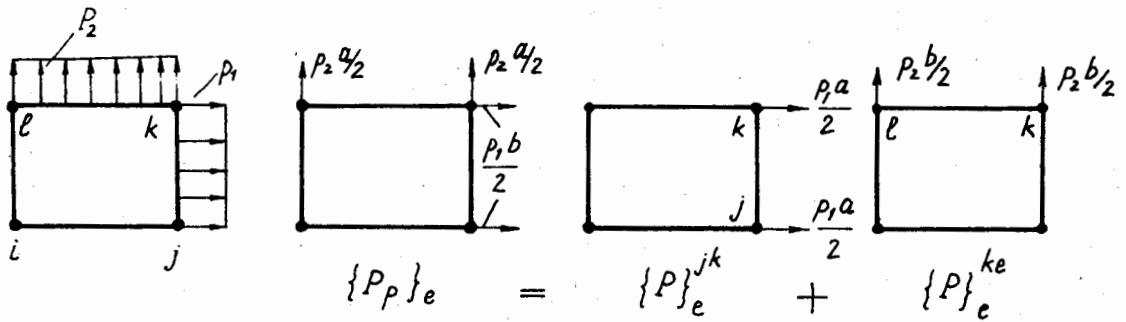
$$k_{58} = k_{14}$$

Về vectơ tải phần tử $\{P\}_e$, cũng tương tự như với phần tử tam giác. Với lực thể

tích $\{g\} = \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix}$ (g_x và g_y là không đổi), thì vectơ tải phần tử là:

$$\{P_g\}_e = \int_{V_e} [N(x,y)]^T \{g\} dV = \int_0^a \int_0^b \begin{Bmatrix} N_i g_x \\ N_i g_y \\ N_j g_x \\ N_j g_y \\ N_k g_x \\ N_k g_y \\ N_l g_x \\ N_l g_y \end{Bmatrix} t dx dy = \frac{tab}{4} \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_x \\ g_y \\ g_x \\ g_y \\ g_x \\ g_y \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

Còn với lực phân bố trên biên, cũng trên nguyên tắc tương tự đã biết. Giả sử trên cạnh biên jk có lực phân bố đều, cường độ $p_1 = \text{const}$ và trên cạnh biên kl



Hình 4.12.

có lực phân bố đều p_2 tác dụng (hình 4.12), thì trong thí dụ cụ thể này vector tải phần tử là $\{P_p\}_e = \{P\}_e^{jk} + \{P\}_e^{kl}$

$$\{P_p\}_e = \{P\}_e^{jk} + \{P\}_e^{kl} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_1 b/2 \\ 0 \\ p_1 b/2 \\ p_2 a/2 \\ 0 \\ p_2 a/2 \end{Bmatrix}$$

Ma trận tính ứng suất $[S]_e$: Dễ thấy là do chuyển vị hàm song tuyến tính nên biến dạng và ứng suất nói chung là phân bố tuyến tính trong phần tử. Ứng suất được tính theo vector chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ bằng công thức

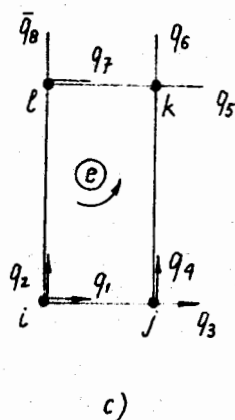
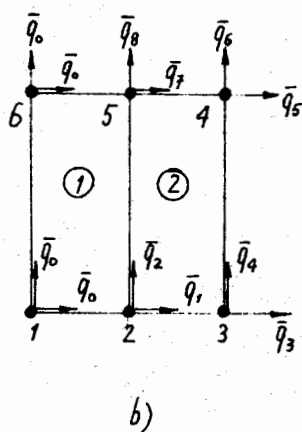
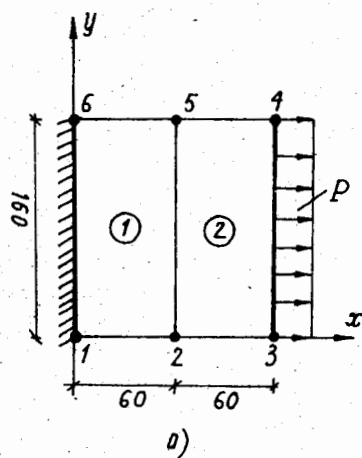
$$\{\sigma\}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_e = [S]_e \{q\}_e \quad (4.55)$$

Trong đó: Ma trận tính ứng suất $[S]_e = [D] [B]$. Hay, cụ thể $[S]_e$ là như sau:

$$[S]_e = \frac{C_1}{ab} \begin{bmatrix} -(b-y) & -C_2(a-x) & (b-y) & -C_2 x & y & C_2 x & -y & C_2(a-x) \\ -C_2(b-y) & -(a-x) & C_2(b-y) & -x & C_2 y & x & -C_2 y & (a-x) \\ -\lambda(a-x) & -\lambda(b-y) & -\lambda x & \lambda(b-y) & \lambda x & \lambda y & \lambda(a-x) & -\lambda y \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Thí dụ : Giải bài toán tấm phẳng ở bài 4.2 với 2 phần tử hình chữ nhật. Sơ đồ nút và phần tử cho trên hình 4.13a.

- Đánh số các bậc tự do tức các chuyển vị của các nút toàn hệ. Để đơn giản quá trình “ghép nối” phần tử, điều kiện biên động học được sử dụng ngay bằng cách gọi các bậc tự do bằng 0 là q_0 và có mã chữ số 0. Các thành phần của vector chuyển vị nút tổng thể biểu diễn trên hình 4.13b. Từ đó, cùng với các bậc tự do



Hình 4. 3. a. Hệ thống nút và phần tử; b. Các bậc tự do tổng thể $\{\bar{q}\}$ của cả hệ ($\bar{q}_0 = 0$); c. Các bậc tự do của phần tử mẫu $\{q\}_e$.

của phần tử mẫu, thiết lập dễ dàng ma trận chỉ số [b]

$\{q\}_e$ \ $\{q\}_e$	Nút i		Nút j		Nút k		Nút l	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
Phần tử 1	0	0	1	2	7	8	0	0
Phần tử 2	1	2	3	4	5	6	7	8

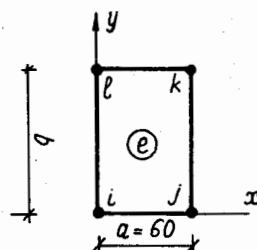
Dễ thấy rằng ma trận độ cứng $[K]_e$ của 2 phần tử là như nhau $[K]_1 = [K]_2$

Với $a = 60$ cm; $b = 160$ cm, $t = 0,36$ cm

$$C_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} = 3,2 \times 10^6, \quad C_2 = \nu = 0,25$$

$$\lambda = \frac{1 - C_2}{2} = 0,375$$

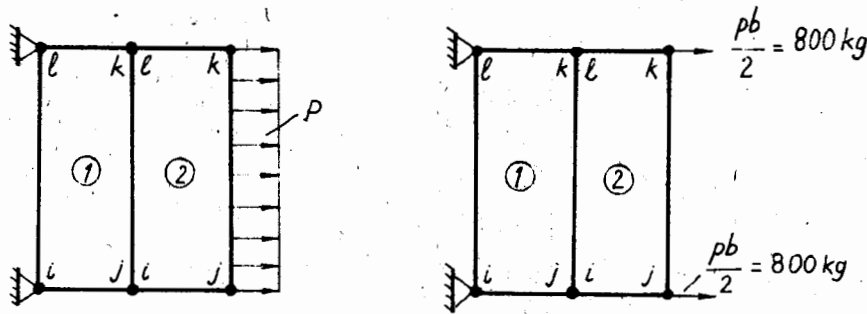
Sử dụng (4.53), thực hiện tính toán, ta có



Hình 4.14.

$$[K]_1 = [K]_2 = 120 \begin{bmatrix} 8983 & 1500 & -8308 & -300 & -4492 & -1500 & 3817 & 300 & 0 & 1 \\ & 4400 & 300 & -2600 & -1500 & -2200 & -300 & -400 & 0 & 2 \\ & & 8983 & -1500 & 3817 & -300 & -4492 & 1500 & 1 & 3 \\ & & & 4400 & 300 & 400 & 1500 & -2200 & 2 & 4 \\ & & & & 8983 & 1500 & -8308 & -300 & 7 & 5 \\ & & & & & 4400 & 300 & -2600 & 8 & 6 \\ & & & & & & 8983 & -1500 & 0 & 7 \\ & & & & & & & 4400 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (2) \\ (1) \end{matrix}$$

đối xứng



Hình 4.15. Tải trọng và các lực nút quy đổi của hệ.

Vì trên phần tử (2) có tải trọng phân bố đều trên cạnh jk nên vector tải phần tử $\{P\}_2$ là.

$$\{P\}_2 = \{P\}_2^{jk} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 800 & 0 & 800 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T$$

Cũng dễ thấy là trong bài toán này, vector tải $\{\bar{P}^*\}$ có kích thước (4×8) là bằng vector $\{P\}_2$

$$\{\bar{P}^*\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 800 & 0 & 800 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T$$

Sử dụng ma trận chỉ số $[b]$ và phương pháp số mã, từ $[K]_1$ và $[K]_2$ ta cũng dễ dàng xây dựng được ma trận $[\bar{K}^*]$ có kích thước (8×8) .

Cuối cùng nhận được hệ phương trình để giải tìm các bậc tự do chưa biết $\{\bar{q}^*\}$

$$[\bar{K}^*]\{\bar{q}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

Cụ thể là:

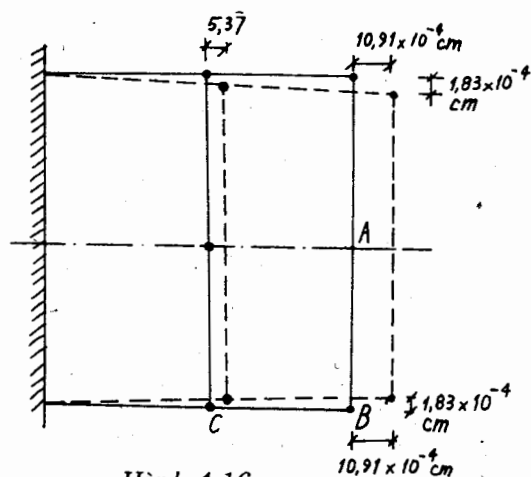
$$1,2 \times 10^4 \begin{bmatrix} 179,7 & 0 & -83,1 & -3 & -44,9 & -15 & 76,3 & 0 \\ & 88 & 3 & -26 & -15 & -22 & 0 & 8 \\ & & 89,8 & -15 & 38,2 & -3 & -44,9 & 15 \\ & & & 44 & 3 & 4 & 15 & -22 \\ & & & & 89,8 & 15 & -83,1 & -3 \\ & \text{Đối xứng} & & & & 44 & 3 & -26 \\ & & & & & & 179,7 & 0 \\ & & & & & & & 88 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \\ \bar{q}_5 \\ \bar{q}_6 \\ \bar{q}_7 \\ \bar{q}_8 \end{Bmatrix} = 800 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình này, ta nhận được các chuyển vị nút còn lại.

$$\begin{Bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \\ -q_4 \\ -q_5 \\ -q_6 \\ -q_7 \\ -q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = 10^{-4} \times \begin{Bmatrix} 5,37 \\ 1,73 \\ 10,91 \\ 1,83 \\ 10,91 \\ -1,83 \\ 5,37 \\ -1,73 \end{Bmatrix} \text{ cm.}$$

Biến dạng của tấm cho trên hình 4.16. Nhận xét rằng kết quả trên bảo đảm tính đối xứng của bài toán. Và so với việc dùng phần tử dạng tam giác, trong bài toán này, phần tử dạng chữ nhật cho kết quả hợp lý và chính xác hơn.

Để so sánh kết quả tính trên, thí dụ này đã được giải bằng máy tính với phần mềm RDM, với lưới phần tử chữ nhật 4 nút mịn hơn. Kết quả cho trong bảng dưới đây và là chuyển vị tại các điểm A, B, C (hình 4.16).



Hình 4.16.

(x 10⁻⁴ cm)

	Số nút	Chuyển vị theo phương x			Chuyển vị theo phương y		
		u _A	u _B	u _C	v _A	v _B	v _C
	6	-	10,77	5,81	-	1,81	1,71
	9	10,57	10,87	5,61	0	1,98	1,67
	25	10,62	10,94	5,58	0	1,97	1,64

Chương 5

Phần tử bậc cao và phần tử đẳng tham số

Như trong chương 4 đã biết trong bài toán phẳng, khi sử dụng phần tử hai chiều dạng tam giác với ba nút là ba đỉnh tam giác thì trường chuyển vị chỉ có thể là các đa thức tuyến tính và do đó biến dạng và ứng suất là không đổi trong phạm vi phần tử. Để có được các trường biến dạng và ứng suất tuyến tính hay bậc cao, mô tả đúng hơn trạng thái biến dạng và ứng suất của phần tử, rõ ràng trường chuyển vị cần được xấp xỉ bằng các đa thức bậc hai hay cao hơn.

Muốn vậy ta phải dùng các phần tử được gọi là các phần tử bậc cao. Trong các phần tử bậc cao ngoài các nút là các đỉnh của phần tử còn cần đưa thêm vào các nút bổ sung (nằm trên cạnh biên hay bên trong phần tử) để bảo đảm số bậc tự do của phần tử (tức số thành phần của vectơ $\{q\}_e$) là bằng số các tọa độ tổng quát (tức số các tham số trong vectơ tham số $\{a\}$). Nhìn chung thì có một số phần tử bậc cao là cần sử dụng để có thể đạt được độ chính xác nào đó trong kết quả cuối cùng. Mặc dù rằng điều này thường không làm giảm thời gian tính toán, nhưng khi dùng phần tử bậc cao người ta sẽ giảm bớt được số phần tử khi rời rạc hóa miền khảo sát. Chính việc này sẽ làm giảm nhẹ đi công việc chuẩn bị số liệu và do đó làm bớt đi nguy cơ sai sót trong quá trình chuẩn bị và nhập dữ kiện bài toán. Hơn nữa, các phần tử bậc cao đặc biệt thích hợp trong các trường hợp khi gradient của trường chuyển vị biến thiên một cách đột ngột. Trong khi đó ở các trường hợp này nếu sử dụng các phần tử đơn giản (tuyến tính) thì gradient của trường chuyển vị là hằng số và do vậy không thể có được kết quả tốt. Chính do hai đặc điểm vừa nêu nên việc sử dụng các phần tử bậc cao ngày càng được dùng rộng rãi trong tính toán. Chương này sẽ trình bày một số phần tử bậc cao hay dùng, cụ thể là các phần tử bậc hai, bậc ba trong các bài toán một chiều, hai chiều và ba chiều.

Ngoài ra, để giải quyết các bài toán mà miền khảo sát có biên cong, chương này cũng sẽ giới thiệu các phần tử được gọi là "phần tử đẳng tham số" (isoparametric element). Để xây dựng các phương trình phần tử đẳng tham số, chúng ta cũng sẽ làm quen với hệ tọa độ tự nhiên đối với các loại phần tử, cũng như các hàm dạng hay các hàm nội suy trong hệ tọa độ này.

§5-1. HỆ TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN CỦA CÁC LOẠI PHẦN TỬ

Hệ tọa độ tự nhiên là một hệ tọa độ địa phương (phần tử) mà nó cho phép xác định vị trí của một điểm bất kỳ thuộc phần tử bởi một tập hợp các số không thứ nguyên có giá trị nằm trong khoảng $[0, 1]$. Thông thường, các hệ tọa độ tự nhiên được chọn sao cho tại các nút chính (các đỉnh góc phần tử) tọa độ tự nhiên tương ứng sẽ có giá trị bằng đơn vị. Các phần tử có dạng hình học khác nhau sẽ có các hệ tọa độ tự nhiên khác nhau như dưới đây.

1. Phần tử một chiều.

Điểm P bất kỳ thuộc phần tử 1 chiều được xác định bởi 2 tọa độ tự nhiên L_1 và L_2 là khoảng cách tương đối của điểm P đến hai điểm nút cuối và nút đầu của phần tử (hình 5.1). Hay, cụ thể hơn.

$$L_1 = \frac{l_1}{l} \quad (5.1)$$

$$L_2 = \frac{l_2}{l}$$

Trong đó l : chiều dài phần tử

Vì trong bài toán một chiều chỉ có một tọa độ độc lập để xác định vị trí của điểm P trên trục x (đó là tọa độ x) nên ta cũng thấy rằng các tọa độ tự nhiên này là không độc lập nhau. Quả vậy.

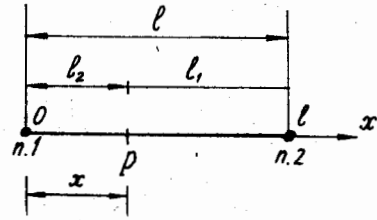
$$L_1 + L_2 = \frac{l_1}{l} + \frac{l_2}{l} = 1 \quad (5.2)$$

Từ (5.1) cũng dễ thấy rằng các tọa độ tự nhiên L_1 và L_2 cũng là các hàm dạng hay hàm nội suy của ma trận $[N]$ của phần tử tuyến tính 1 chiều dùng trong bài toán thanh biến dạng dọc trục (kéo nén đúng tâm) ở chương 3. Thật vậy:

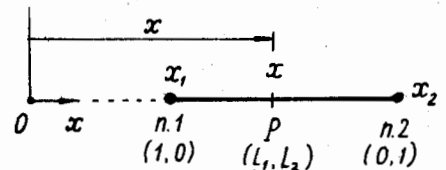
$$L_1 = \frac{l_1}{l} = \frac{l - x}{l} = 1 - \frac{x}{l} = N_1(x)$$

$$L_2 = \frac{l_2}{l} = \frac{x}{l} = N_2(x).$$

Xét trong hệ tọa độ chung của hệ (hình 5.2) một điểm P bất kỳ thuộc phần tử có tọa độ x có thể được biểu diễn như một tổ hợp tuyến tính của các tọa độ các điểm nút 1 và nút 2 như sau.



Hình 5.1. Phần tử 1 chiều



Hình 5.2. Các tọa độ tự nhiên của phần tử một chiều.

$$x = x_1 L_1 + x_2 L_2 \quad (5.3)$$

Trong đó x_1, x_2 là tọa độ vuông góc thông thường của các nút 1 và 2 trong hệ tọa độ tổng thể.

Thật vậy: Từ hình 5.2, các tọa độ tự nhiên của P sẽ là

$$L_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x}{l}, \quad L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{l} \quad (5.4)$$

Thay vào (5.3) ta có:

$$x_1 L_1 + x_2 L_2 = x_1 \frac{x_2 - x}{l} + x_2 \frac{x - x_1}{l} = \frac{1}{l} x (x_2 - x_1) = x$$

Vậy, quan hệ giữa các tọa độ tự nhiên và tọa độ vuông góc thông thường của một điểm P bất kỳ có thể biểu diễn ở dạng ma trận như sau:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix}$$

Hay:

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Với $l = x_2 - x_1$

Nếu f là hàm của L_1 và L_2 thì đạo hàm của f lấy đối với biến x sẽ là

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial L_1} \cdot \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial L_2} \cdot \frac{\partial L_2}{\partial x}$$

trong đó, từ (5.4), ta có:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = -\frac{1}{l} \quad \text{và} \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{1}{l}$$

Khi xây dựng các ma trận độ cứng phần tử và vectơ tải phần tử, ta thường phải thực hiện các tích phân theo x dạng

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

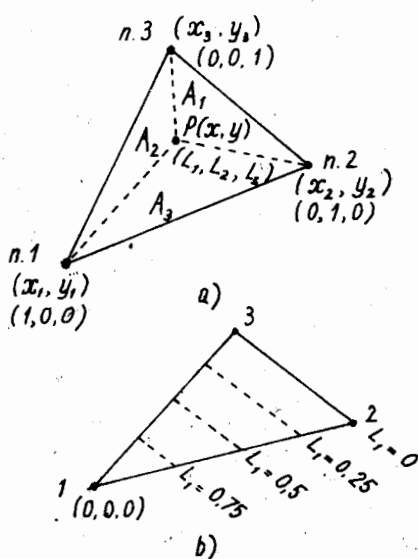
Nếu sử dụng hệ tọa độ tự nhiên, mà thực chất như một phép đổi biến, tích phân trên sẽ có dạng

$$\int_{x_1}^{x_2} L_1^\alpha L_2^\beta dx = \int_0^1 (1 - L_2)^\alpha L_2^\beta dL_2 = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} l \quad (5.5)$$

Bảng 5.1. Cho giá trị của tích phân trên tương ứng với một số giá trị α và β nào đó

Giá trị của α, β		Giá trị của tích phân trong (5.5)/l
α	β	
0	0	1
1	0	1/2
1	1	1/6
2	0	1/3
1	2	1/12
3	0	1/4
4	0	1/5
2	2	1/30
3	1	1/20
1	4	1/30

2. Phần tử 2 chiều (dạng tam giác)



Hình 5.3. Phần tử tam giác và các tọa độ diện tích

Điểm P bất kỳ có tọa độ (x,y) trong phần tử tam giác được xác định bởi tập 3 tọa độ tự nhiên (L_1, L_2, L_3) được định nghĩa như sau

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (5.6)$$

Trong đó: A_i là diện tích tam giác được tạo bởi điểm P và cạnh đối diện nút i ($i = 1, 2, 3$)

A là diện tích phần tử.

L_i còn được gọi là *tọa độ diện tích*.

Ngoài ra cũng dễ thấy rằng 3 tọa độ không độc lập vì $A_1 + A_2 + A_3 = A$

$$\text{Nên } L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (5.7)$$

Để nhận thấy tọa độ tự nhiên của các đỉnh nút 1, 2, 3 tại các góc. Và cũng dễ nhận thấy rằng các điểm cùng đường thẳng

song song biên 3-2 thì có cùng tọa độ L_1 (hình vẽ 5.3b)

Có thể chứng minh được L_1, L_2, L_3 cũng là các hàm dạng của phần tử tuyến tính dạng tam giác; tức là:

$$N_i = L_1; \quad N_j = L_2; \quad N_k = L_3$$

Quan hệ giữa hệ tọa độ tự nhiên và các tọa độ vuông góc cũng có thể chứng minh được là:

$$x = \sum_{i=1}^3 x_i L_i = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3$$

$$y = \sum_{i=1}^3 y_i L_i = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 \quad (5.8)$$

trong đó (x_i, y_i) là tọa độ của điểm nút i .

Vậy mỗi tập các tọa độ tự nhiên (L_1, L_2, L_3) thỏa mãn (5.10) sẽ tương ứng một tập duy nhất các tọa độ vuông góc (x, y) .

Các phương trình (5.7) và (5.8) được biểu diễn ở dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Nghịch đảo (5.13), ta có:

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & y_{23} & x_{32} \\ a_2 & y_{31} & x_{13} \\ a_3 & y_{12} & y_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

trong đó: $a_i = x_j y_k - x_k y_j$ ($i, j, k \Rightarrow 1, 2, 3$)

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

và A : diện tích tam giác phần tử, hay $2A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$

Để thấy (5.10) chính là (4.21), hay nói cách khác $L_i = N_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Nếu f là hàm của L_1, L_2, L_3 , thì đạo hàm của nó đối với x, y là:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.11)$$

trong đó từ (5.14) ta có

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{2A} y_{jk}, \quad \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{1}{2A} x_{kj} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (5.12)$$

Khi tích phân các đa thức biểu diễn theo tọa độ tự nhiên có thể sử dụng các công thức sau:

$$\int_1 L_1^\alpha L_2^\beta dl = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} l$$

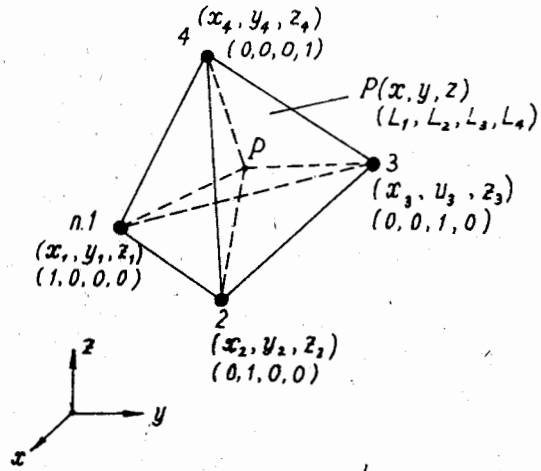
$$\text{và} \quad \iint_A L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A$$

Tích phân thứ nhất để tính tích phân đường dọc theo cạnh phần tử với l là khoảng cách giữa 2 nút tạo nên cạnh đường xét.

3. Phần tử 3 chiều (dạng tứ diện)

Cũng tương tự như với phần tử 2 chiều dạng tam giác, khi các tọa độ tự nhiên của 1 điểm là các diện tích tương đối, thì ở phần tử 3 chiều dạng tứ diện, các tọa độ tự nhiên là các thể tích tương đối và cụ thể như sau.

Trong hệ tọa độ tự nhiên này, một điểm P thuộc phần tử được xác định bởi tập 4 tọa độ (L_1, L_2, L_3, L_4) (hình 5.4)



Hình 5.4. Phần tử tứ diện và các tọa độ thể tích

Các tọa độ tự nhiên này được định nghĩa là

$$L_1 = \frac{V_1}{V}, L_2 = \frac{V_2}{V}, L_3 = \frac{V_3}{V}, L_4 = \frac{V_4}{V} \quad (5.13)$$

Ở đây V_i là thể tích của khối tứ diện hình thành bởi điểm P và mặt đáy đối diện nút i .

V là thể tích của phần tử.

Rõ ràng các tọa độ này có quan hệ:

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \frac{V_1}{V} + \frac{V_2}{V} + \frac{V_3}{V} + \frac{V_4}{V} = 1 \quad (5.14)$$

Các tọa độ thể tích này cũng là các hàm dạng đối với phần tử khối tứ diện tuyến tính. Hay:

$$N_i = L_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Quan hệ giữa các tọa độ vuông góc và tọa độ tự nhiên là:

$$\begin{cases} x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 \\ y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 \\ z = L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4 \end{cases} \quad (5.15)$$

Các phương trình (5.14) và (5.15) được biểu diễn trong dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix}$$

Ở dạng ngược lại

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Trong đó:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \text{ là thể tích của phần tử}$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad b_1 = - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (5.17)$$

$$c_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}, \quad d_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Còn các hằng số khác có được bằng phép hoán vị vòng tròn các chỉ số 1, 2, 3, 4.

Chú ý là với hệ tọa độ vuông góc là hệ tọa độ thuận (như hình 5.4) thì các công thức trên đúng chỉ với khi các nút 1, 2 và 3 được đánh số theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ nút 4.

Nếu f là hàm của các tọa độ tự nhiên, thì các đạo hàm của nó lấy đối với các tọa độ vuông góc sẽ là

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial L_i} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial L_i} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial L_i} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.18)$$

trong đó: $\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{6V}$, $\frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{6V}$, $\frac{\partial L_i}{\partial z} = \frac{d_i}{6V}$

Tích phân của các đa thức của tọa độ tự nhiên có thể được tính như sau

$$\int_V L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma L_4^\delta dV = \frac{\alpha! \beta! \gamma! \delta!}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 3)!} 6V \quad (5.19)$$

§5.2. PHẦN TỬ MỘT CHIỀU BẬC CAO

1. Trong hệ tọa độ vuông góc:

Xét phần tử thanh chịu biến dạng dọc trục (bài toán kéo – nén đúng tâm). Như đã nói ở phần mở đầu của chương này, để tăng tính chính xác của mô hình phần tử, chúng ta cần sử dụng các đa thức bậc cao để xấp xỉ hóa trường chuyển vị $u_e(x)$ của phần tử. Tất nhiên khi đó ngoài hai nút đầu và cuối (gọi là các nút chính) của phần tử, ta phải định thêm một số nút khác trong phạm vi chiều dài phần tử (các nút bổ sung). Giả sử phần tử có n nút cách đều nhau thì hàm chuyển vị $u_e(x)$ được xấp xỉ bởi đa thức bậc $(n - 1)$.

$$u_e(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} \quad (0 \leq x \leq l)$$

Hơn nữa, theo tư tưởng chủ đạo của PPPTHH, hàm chuyển vị u_e của phần tử sẽ được nội suy (hay biểu diễn) qua vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ trong dạng

$$u_e(x) = [N(x)] \{q\}_e$$

Hay
$$u_e(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i \quad (5.20)$$

Ở đây $N_i(x)$ là các hàm dạng (hay các hàm nội suy) bậc $(n - 1)$,

u_i là chuyển vị dọc trục của nút i thuộc phần tử và nó là bậc tự do q_i của vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$.

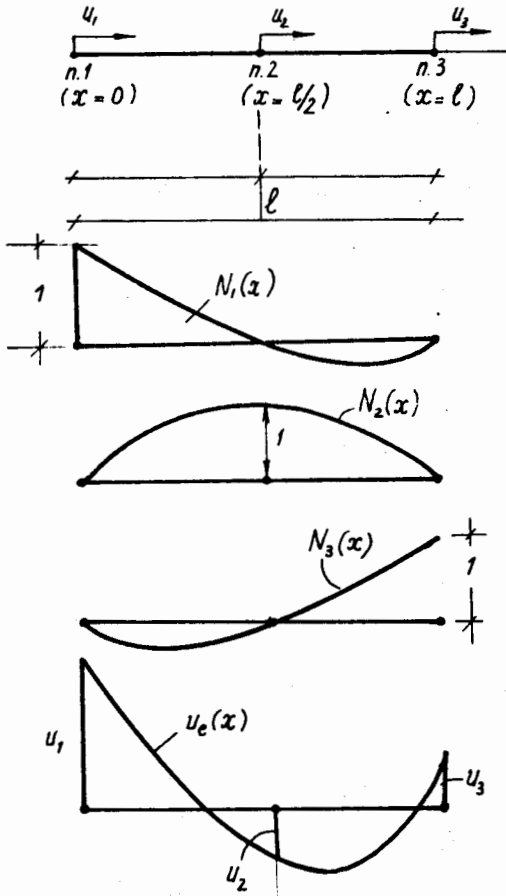
Cụ thể, với phần tử bậc 2, hàm xấp xỉ của chuyển vị dọc trục là

$$u_e(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \quad (5.21)$$

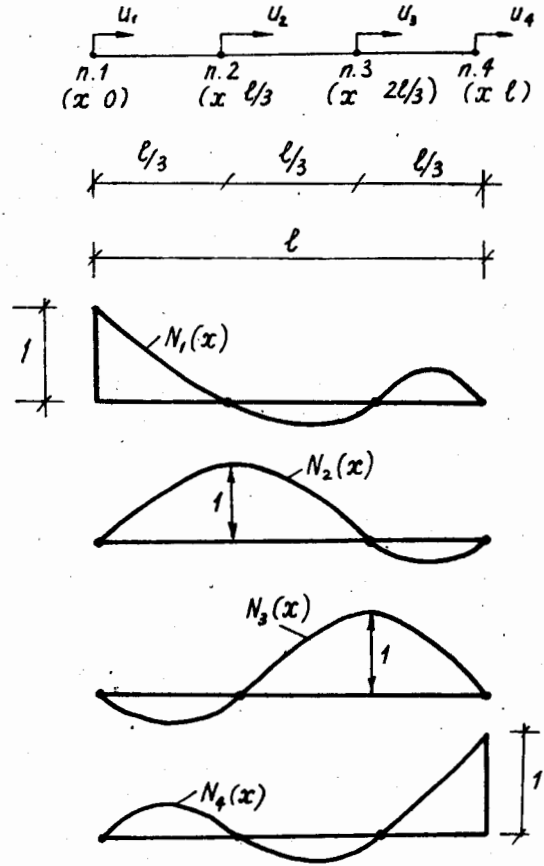
Hay
$$u_e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [P(x)] \{a\}.$$

Vì vectơ tham số $\{a\}$ chứa 3 tham số nên phần tử cần có 3 bậc tự do là 3 chuyển vị dọc trục của 3 nút (hình 5.5).

Từ điều kiện đồng nhất các bậc tự do của phần tử với giá trị hàm chuyển vị $u_e(x)$ tại 3 điểm nút đã định



Hình 5.5. Phần tử 1 chiều bậc 2
Đồ thị các hàm dạng và chuyển vị phần tử



Hình 5.6. Phần tử 1 chiều bậc 3 và đồ thị các
hàm dạng

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_e(0) \\ u_e(l/2) \\ u_e(l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & l/2 & l^2/4 \\ 1 & l & l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Ta tìm được dễ dàng các tham số a_i theo u_1, u_2, u_3 là

$$\begin{cases} a_1 = u_1 \\ a_2 = (-3u_1 + 4u_2 - u_3)/l \\ a_3 = 2(u_1 - 2u_2 + u_3)/l^2 \end{cases} \quad (5.22)$$

Thay (5.22) vào (5.21) và sắp xếp lại, ta có

$$u_e(x) = \sum_{i=1}^3 N_i(x) u_i = [N(x)] \{q\}_e \quad (5.23)$$

Ở đây $[N(x)] = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x)]$

$$\left. \begin{aligned} N_1(x) &= \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ N_2(x) &= 4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ N_3(x) &= -\frac{x}{l} \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Với phần tử một chiều bậc 3, hàm xấp xỉ của chuyển vị là đa thức bậc 3, phần tử có 4 điểm nút cách đều nhau như hình 5.6.

$$u_e(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

Hay
$$u_e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [P(x)] \{a\} \quad (5.25)$$

Thực hiện đồng nhất các bậc tự do của $\{q\}_e$ và giá trị hàm chuyển vị tại các nút phần tử, ta có:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_e(0) \\ u_e(l/3) \\ u_e(2l/3) \\ u_e(l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l/3 & l^2/9 & l^3/27 \\ 1 & 2l/3 & 4l^2/9 & 8l^3/27 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [A] \{a\}$$

Nghịch đảo của $[A]$ là:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} l^3 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{2} l^2 & 9l^2 & -\frac{9}{2} l^2 & l^2 \\ 9l & -\frac{45}{2} l & 18l & -\frac{9}{2} l \\ -\frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy: } \{a\} = [A]^{-1} \{q\}_e$$

Thay vào (5.25):

$$u_e(x) = [N(x)] \{q\}_e \quad (5.26)$$

Với ma trận các hàm dạng $[N(x)] = [P(x)] [A]^{-1}$

$$N(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \times \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} l^3 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{2}l^2 & 9l^2 & -\frac{9}{2}l^2 & l^2 \\ 9l & -\frac{45}{2}l & 18l & -\frac{9}{2}l \\ -\frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

trong đó các hàm dạng $N_i(x)$ là:

$$\begin{cases} N_1(x) = \left(1 - 3\frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{3x}{2l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ N_2(x) = 9\frac{x}{l} \left(1 - \frac{3x}{2l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ N_3(x) = -\frac{9x}{2l} \left(1 - 3\frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ N_4(x) = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{3x}{l}\right) \left(1 - \frac{3x}{2l}\right) \end{cases} \quad (5.27)$$

Đồ thị các hàm dạng này cho trong hình 5.6.

Nhận xét: Các hàm dạng hay các hàm nội suy trên là các hàm nội suy Lagrange. Việc tìm các hàm nội suy $N_i(x)$ như trên sẽ rất phức tạp khi bậc đa thức tăng lên bởi việc tìm nghịch đảo của ma trận $[A]$. Tuy nhiên nếu sử dụng tính chất sau đây của các hàm nội suy Lagrange thì việc tìm các hàm nội suy này trở nên đơn giản.

Từ tính chất:

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases} \quad (5.28)$$

ở đây x_j là tọa độ của nút j

$N_i(x_j)$ là giá trị của hàm nội suy thứ i (tương ứng nút i) tại nút j

Nói cách khác, hàm nội suy tương ứng nút i sẽ có giá trị bằng đơn vị tại nút i và bằng 0 tại các nút khác (hình 5.7)

Ta có thể dễ dàng tìm hàm dạng $N_i(x)$ của nút i theo công thức tổng quát sau.

$$N_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

$$\text{Hay } N_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (5.29)$$

trong đó n : số nút của phần tử hay số bậc tự do của vector $\{q\}_e$

x_j : tọa độ của nút j

Thí dụ: Tìm $N_2(x)$ của phần tử bậc 3 (hình 5.6)

Các nút có tọa độ: $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = 1$

Sử dụng (5.29)

$$N_2(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq 2)}}^4 \frac{(x - x_k)}{(x_2 - x_k)} = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

Thay các tọa độ nút vào, ta có

$$N_2(x) = \frac{(x - 0) \left(x - \frac{2}{3}\right) (x - 1)}{\left(\frac{1}{3} - 0\right) \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right)} = 9 \frac{x}{1} \left(1 - \frac{3x}{1}\right) \left(1 - \frac{x}{1}\right)$$

2. Trong hệ tọa độ tự nhiên:

Như trên đã thấy, hàm chuyển vị của phần tử 1 chiều trong bài toán biến dạng dọc trục được xem như tổ hợp tuyến tính của các hàm dạng hay hàm nội suy Lagrange

$$u_e = \sum_{i=1}^n N_i u_i = [N] \{q\}_e \quad (5.30)$$

trong đó N_i là các hàm nội suy tương ứng nút i .

Trong hệ tọa độ tự nhiên thì N_i được biểu diễn theo 2 tọa độ tự nhiên L_1 và L_2 không độc lập nhau. Vậy cũng có thể thấy rằng u_e cũng được biểu diễn theo 2 tọa độ tự nhiên này. Vấn đề là ta sẽ tìm các hàm nội suy theo các tọa độ tự nhiên. Với phần tử tuyến tính, dạng tổng quát của các hàm nội suy tuyến tính trong hệ tọa độ tự nhiên là:

$$N_i = \alpha_1^{(i)} L_1 + \alpha_2^{(i)} L_2 \quad (\text{với } i = 1, 2) \quad \checkmark \quad (5.31)$$

Ở đây $\alpha_1^{(i)}$ và $\alpha_2^{(i)}$ là các hằng số.

Các hằng số này sẽ được xác định từ điều kiện bảo đảm tính chất (5.28), tức là điều kiện N_i phải có giá trị bằng 1 tại nút i và bằng 0 tại các nút khác.

Hay:

$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{tại nút } i \\ 0 & \text{tại các nút } j \neq i \end{cases} \quad (5.32)$$

Cụ thể với phần tử tuyến tính này ta có

$$N_1 = \begin{cases} 1 & \text{tại nút 1 } (L_1 = 1, L_2 = 0) \\ 0 & \text{tại nút 2 } (L_1 = 0, L_2 = 1) \end{cases}$$

Sử dụng (5.31) ta nhận được hệ phương trình để tìm $\alpha_1^{(1)}$ và $\alpha_2^{(1)}$ như sau:

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1^{(1)} \cdot 1 + \alpha_2^{(1)} \cdot 0 \\ 0 = \alpha_1^{(1)} \cdot 0 + \alpha_2^{(1)} \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{(1)} = 1 \\ \alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

Vậy theo (5.31): $N_1 = L_1$

Tương tự, tìm N_2 từ điều kiện

$$N_2 = \begin{cases} 1 & \text{tại nút 2 } (L_1 = 0, L_2 = 1) \\ 0 & \text{tại nút 1 } (L_1 = 1, L_2 = 0) \end{cases}$$

Và ta có hệ phương trình xác định $\alpha_1^{(2)}$ và $\alpha_2^{(2)}$ là

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1^{(2)} \cdot 0 + \alpha_2^{(2)} \cdot 1 \\ 0 = \alpha_1^{(2)} \cdot 1 + \alpha_2^{(2)} \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{(2)} = 0 \\ \alpha_2^{(2)} = 1 \end{cases} \Rightarrow N_2 = L_2$$

Vậy ma trận các hàm nội suy trong phần tử này là

$$[N] = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix}$$

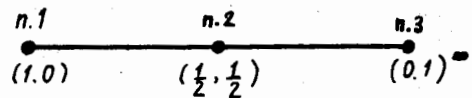
Kết quả này cũng đã được chứng minh ở bài 5-1

Với cách này chúng ta cũng tìm được các hàm nội suy của các phần tử bậc cao.

Với phần tử bậc 2, như đã biết ở các mục trước, hàm chuyển vị u_e là

$$u_e = [N] \{q\}_e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}_e \quad (5.33)$$

trong đó các hàm nội suy N_1, N_2 và N_3 là các hàm nội suy bậc 2 tương ứng các nút 1, 2 và 3. Trong hệ tọa độ tự nhiên các nút này có tọa độ như chỉ ra trong hình 5.7.



Hình 5.7. Phần tử 1 chiều bậc 2 với các tọa độ tự nhiên

Hàm nội suy bậc 2 của nút i trong hệ tọa độ tự nhiên được biểu diễn ở dạng tổng quát như sau:

$$N_i = \alpha_1^{(i)} L_1 + \alpha_2^{(i)} L_2 + \alpha_3^{(i)} L_1 L_2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.34)$$

Để tìm N_1 ta sử dụng điều kiện (5.32)

$$N_1 = \begin{cases} 1 & \text{tại nút 1 } (L_1 = 1, L_2 = 0) \\ 0 & \text{tại nút 2 } \left(L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = \frac{1}{2} \right) \\ 0 & \text{tại nút 3 } (L_1 = 0, L_2 = 1) \end{cases}$$

Sử dụng (5.34) điều kiện trên cho ta hệ phương trình để xác định các hằng số $\alpha_j^{(1)}$ ($j = 1, 2, 3$)

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1^{(1)} \cdot 1 + \alpha_2^{(1)} \cdot 0 + \alpha_3^{(1)} \cdot 0 \\ 0 = \alpha_1^{(1)} \cdot \frac{1}{2} + \alpha_2^{(1)} \cdot \frac{1}{2} + \alpha_3^{(1)} \cdot \frac{1}{4} \\ 0 = \alpha_1^{(1)} \cdot 0 + \alpha_2^{(1)} \cdot 1 + \alpha_3^{(1)} \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{(1)} = 1 \\ \alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_3^{(1)} = -2 \end{cases}$$

Thay vào (5.34), ta có:

$$N_1 = L_1 - 2 L_1 L_2$$

Vì $L_1 + L_2 = 1$ nên có thể viết

$$N_1 = L_1 (2 L_1 - 1)$$

Bằng cách tương tự, ta tìm được N_2 và N_3 . Tóm lại

$$\begin{cases} N_1 = L_1 (2 L_1 - 1) \\ N_2 = 4 L_1 L_2 \\ N_3 = L_2 (2 L_2 - 1) \end{cases} \quad (5.35)$$

Trong phần tử bậc 3, hàm chuyển vị u_e là xấp xỉ bậc 3 và là tổ hợp tuyến tính của các hàm dạng bậc 3 như sau

$$u_e = [N] \{q\}_e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \{q\}_e$$

trong đó các hàm nội suy bậc ba N_i được biểu diễn trong hệ tọa độ tự nhiên, có dạng tổng quát

$$N_i = \alpha_1^{(i)} L_1 + \alpha_2^{(i)} L_2 + \alpha_3^{(i)} L_1 L_2 + \alpha_4^{(i)} L_1^2 L_2 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3, 4) \quad (5.36)$$

Cũng tương tự như trên, tức sử dụng điều kiện (5.32), thì ứng với mỗi nút ta sẽ có 1 hệ phương trình để xác định các hằng số $\alpha_j^{(i)}$ của hàm N_i tương ứng nút đó với chú ý rằng tọa độ tự nhiên của các nút là:

$$\text{nút 1: } L_1 = 1, L_2 = 0$$

$$\text{nút 2: } L_1 = \frac{2}{3}, L_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{nút 3: } L_1 = \frac{1}{3}, L_2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{nút 4: } L_1 = 0, L_2 = 1$$

Cuối cùng, các hàm nội suy N_i bậc 3 của phần tử 1 chiều là:

$$\begin{cases} N_1 = L_1 \left(1 - \frac{9}{2} L_1 L_2 \right) \\ N_2 = -\frac{9}{2} L_1 L_2 (1 - 3 L_1) \\ N_3 = 9 L_1 L_2 \left(1 - \frac{3}{2} L_1 \right) \\ N_4 = -\frac{9}{2} L_1 L_2 (1 - L_1) \end{cases} \quad (5.37)$$

§5.3. PHẦN TỬ TAM GIÁC BẬC CAO TRONG HỆ TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN

Như đã biết trong chương 4, trong bài toán phẳng của dàn hồi, trường chuyển vị của phần tử tam giác trong trường hợp đơn giản nhất được xấp xỉ bởi các đa thức tuyến tính như sau:

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y \\ a_4 + a_5x + a_6y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \{a\}$$

Hay, được biểu diễn qua vectơ các bậc tự do của phần tử $\{q\}_e$ như sau

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 \end{bmatrix} \{q\}_e \quad (5.38)$$

Nói cách khác, các thành phần chuyển vị u (theo phương x) và v (theo phương y) là tổ hợp tuyến tính của các hàm dạng (hàm nội suy) N_i tuyến tính như sau.

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i \quad \text{và} \quad v = \sum_{i=1}^3 N_i v_i$$

Hay viết ở dạng gọn hơn: $u = [N] \{q_u\}_e$ và $v = [N] \{q_v\}_e$ (5.39)

Ở đây chú ý là $[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix}$ là tập hợp 3 hàm nội suy tuyến tính

$$\{q_u\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}_e \quad \text{là vectơ tập hợp các chuyển vị nút theo phương } x \text{ của phần tử}$$

$$\{q_v\}_e = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}_e \quad \text{là vectơ tập hợp các chuyển vị nút theo phương } y \text{ của phần tử}$$

Trong hệ tọa độ tự nhiên (tọa độ diện tích), các hàm nội suy tuyến tính N_i tương ứng nút i ($i = 1, 2, 3$) có dạng tổng quát sau:

$$N_i = \alpha_1^{(i)} L_1 + \alpha_2^{(i)} L_2 + \alpha_3^{(i)} L_3 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.40)$$

Việc xác định các hằng số $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$ và $\alpha_3^{(i)}$ hoàn toàn tương tự như đã trình bày trong các bài trên, tức là bằng cách sử dụng điều kiện giá trị của N_i phải bằng 1 tại nút i và bằng 0 tại các nút còn lại (5.32) thì ta sẽ nhận được một hệ phương trình đơn giản để xác định các hằng số $\alpha_j^{(i)}$.

Thí dụ, để tìm N_2 , ta sử dụng điều kiện (5.32)

$$N_2 = \begin{cases} 1 \text{ tại nút 2 } (L_1 = 0, L_2 = 1, L_3 = 0) \\ 0 \text{ tại nút 1 } (L_1 = 1, L_2 = 0, L_3 = 0) \\ 0 \text{ tại nút 3 } (L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 1) \end{cases}$$

Từ đây có hệ phương trình tìm các $\alpha^{(2)}$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1^{(2)} \cdot 0 + \alpha_2^{(2)} \cdot 1 + \alpha_3^{(2)} \cdot 0 \\ 0 = \alpha_1^{(2)} \cdot 1 + \alpha_2^{(2)} \cdot 0 + \alpha_3^{(2)} \cdot 0 \\ 0 = \alpha_1^{(2)} \cdot 0 + \alpha_2^{(2)} \cdot 0 + \alpha_3^{(2)} \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{(2)} = 0 \\ \alpha_2^{(2)} = 1 \\ \alpha_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

Thay các $\alpha^{(2)}$ vào (5.40) ta được: $N_2 = L_2$

Tương tự, ta cũng có

$$N_1 = L_1 \quad (5.41)$$

$$N_3 = L_3$$

Kết quả này cũng đã nhận được ở bài 5.2.

Với phần tử bậc 2, các hàm chuyển vị sẽ được xấp xỉ hóa bằng các đa thức bậc 2. Dạng tổng quát của các đa thức bậc 2 này có thể thấy từ tam giác Pascal như sau,

$$\begin{cases} u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 \\ v(x,y) = a_7 + a_8 x + a_9 y + a_{10} xy + a_{11} x^2 + a_{12} y^2 \end{cases}$$

Như vậy, dễ thấy rằng để bảo đảm việc nội suy các hàm chuyển vị thành phần theo các chuyển vị nút rõ ràng là ngoài hệ thống 3 điểm nút chính (nút 1, 2 và 3) tại các đỉnh tam giác, thì nay cần đưa vào hệ thống 3 nút bổ sung (nút 4, 5 và 6) tại điểm giữa các cạnh phần tử. Tọa độ của hệ thống 6 nút này trong hệ tọa độ vuông góc và tọa độ diện tích được cho trong hình 5.8 a. Biết rằng quan hệ giữa các tọa độ này đã cho trong công thức (5.9) hoặc (5.10)

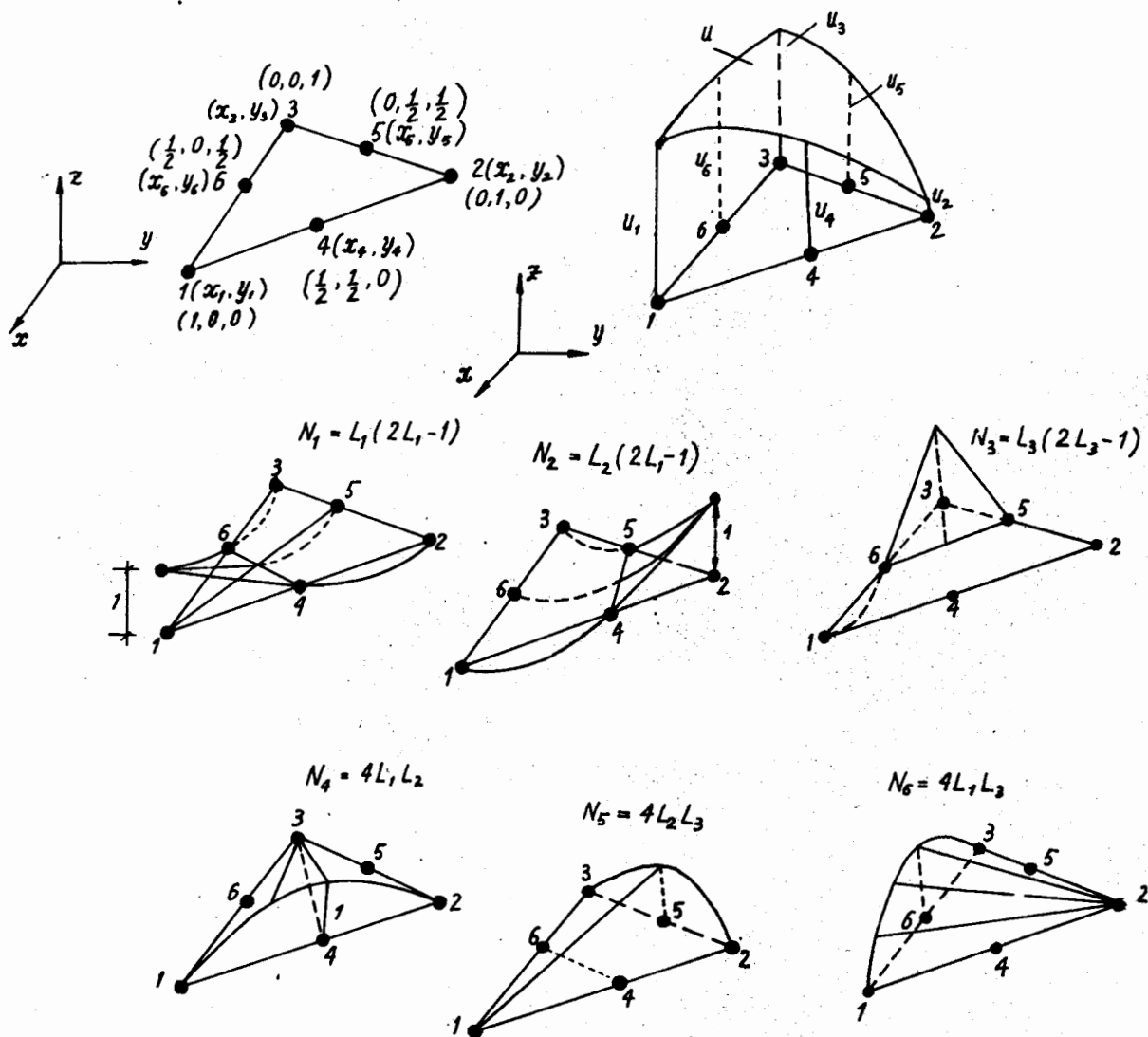
$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$$

Khi nội suy các hàm chuyển vị thành phần theo các chuyển vị nút tương ứng, ta dễ thấy chúng là các tổ hợp tuyến tính của 6 hàm nội suy bậc 2 và có thể được biểu diễn ở dạng sau.

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^6 N_i u_i = [N] \{q_u\}_e \quad (5.42)$$

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^6 N_i v_i = [N] \{q_v\}_e$$

Ở đây:



Hình 5.8. Phần tử tam giác bậc 2: a. Các nút và tọa độ diện tích các nút; b. Đồ thị các hàm dạng bậc 2; c. Một biểu diễn hàm xấp xỉ u

$\{q_u\}_e = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6\}^T$ là các chuyển vị theo phương x của các nút phần tử

$\{q_v\}_e = \{v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6\}^T$ là các chuyển vị theo phương y của các nút phần tử

$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6]$ là ma trận các hàm dạng hay các hàm nội suy

Các hàm nội suy bậc hai N_i tương ứng nút i (với $i = 1, 2, \dots, 6$) trong hệ tọa độ tự nhiên có dạng:

$$N_i = \alpha_1^{(i)} L_1 + \alpha_2^{(i)} L_2 + \alpha_3^{(i)} L_3 + \alpha_4^{(i)} L_1 L_2 + \alpha_5^{(i)} L_2 L_3 + \alpha_6^{(i)} L_1 L_3 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (5.43)$$

Việc xác định các hằng số $\alpha^{(i)}$ trong (5.43) đã trình bày ở trên.

Thí dụ; để tìm N_1 ta sử dụng điều kiện (5.32), tức là

$$N_1 = \begin{cases} 1 \text{ tại nút 1 } (L_1 = 1, L_2 = 0, L_3 = 3) \\ 0 \text{ tại nút 2 } (L_1 = 0, L_2 = 1, L_3 = 0) \\ 0 \text{ tại nút 3 } (L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 1) \\ 0 \text{ tại nút 4 } (L_1 = 1/2, L_2 = 1/2, L_3 = 0) \\ 0 \text{ tại nút 5 } (L_1 = 0, L_2 = 1/2, L_3 = 1/2) \\ 0 \text{ tại nút 6 } (L_1 = 1/2, L_2 = 0, L_3 = 1/2) \end{cases}$$

Sử dụng (5.43), ta nhận được hệ phương trình xác định các hằng số $\alpha^{(1)}$ sau

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1^{(1)} \\ 0 = \alpha_2^{(1)} \\ 0 = \alpha_3^{(1)} \\ 0 = \frac{1}{2} \alpha_1^{(1)} + \frac{1}{2} \alpha_2^{(1)} + \frac{1}{4} \alpha_4^{(1)} \\ 0 = \frac{1}{2} \alpha_2^{(1)} + \frac{1}{2} \alpha_3^{(1)} + \frac{1}{4} \alpha_5^{(1)} \\ 0 = \frac{1}{2} \alpha_1^{(1)} + \frac{1}{2} \alpha_3^{(1)} + \frac{1}{4} \alpha_6^{(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{(1)} = 1 \\ \alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_3^{(1)} = 0 \\ \alpha_4^{(1)} = -2 \\ \alpha_5^{(1)} = 0 \\ \alpha_6^{(1)} = -2 \end{cases}$$

Thay vào (5.34), ta được N_1

$$N_1 = L_1 - 2 L_1 L_2 - 2 L_1 L_3 = L_1 (1 - 2 L_2 - 2 L_3) = L_1 [1 - 2(L_2 + L_3)]$$

Vì $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ nên $L_2 + L_3 = 1 - L_1$

Vậy: $N_1 = L_1 (2 L_1 - 1)$

Tương tự cũng tìm được các N_i khác. Tóm lại

$$\begin{cases} N_i = L_i (2 L_i - 1) & (\text{với } i = 1, 2, 3) \\ N_4 = 4 L_1 L_2 \\ N_5 = 4 L_2 L_3 \\ N_6 = 4 L_3 L_1 \end{cases} \quad (5.44)$$

Các mặt cong bậc 2 biểu diễn 6 hàm nội suy được cho trong hình (5.8b). Hình 5.7c minh họa mặt cong biểu diễn hàm xấp xỉ chuyển vị u bậc 2 của phần tử.

Với phần tử tam giác bậc 3, hình 5.9 các hàm chuyển vị u, v của phần tử được xấp xỉ bằng các đa thức bậc ba có dạng

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 x^3 + a_{10} y^3$$

$$v(x, y) = a_{11} + a_{12} x + a_{13} y + a_{14} xy + a_{15} x^2 + a_{16} y^2 + a_{17} x^2 y + a_{18} xy^2 + a_{19} x^3 + a_{20} y^3$$

Hay các chuyển vị này là các tổ hợp tuyến tính của hệ thống 10 hàm nội suy bậc 3 như sau.

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{10} N_i u_i = [N] \{q_u\}_e \quad (5.45)$$

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^{10} N_i v_i = [N] \{q_v\}_e$$

Trong đó $N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_{10} \end{bmatrix}$

Với N_i là hàm nội suy bậc 3 tương ứng nút i (với $i = 1, 2, \dots, 10$) và trong hệ tọa độ diện tích, dạng tổng quát của nó là

$$N_i = \alpha_1^{(i)} L_1 + \alpha_2^{(i)} L_2 + \alpha_3^{(i)} L_3 + \alpha_4^{(i)} L_1 L_2 + \alpha_5^{(i)} L_2 L_3 + \alpha_6^{(i)} L_3 L_1 + \alpha_7^{(i)} L_1^2 L_2 + \alpha_8^{(i)} L_2^2 L_3 + \alpha_9^{(i)} L_3^2 L_1 + \alpha_{10}^{(i)} L_1 L_2 L_3 \quad (5.46)$$

Cũng tương tự trên, ta dễ dàng xác định được các N_i .

$$N_i = \frac{1}{2} L_i (3 L_i - 1) (3 L_i - 2) \quad (\text{với } i = 1, 2, 3)$$

$$N_4 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3 L_1 - 1)$$

$$N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3 L_2 - 1)$$

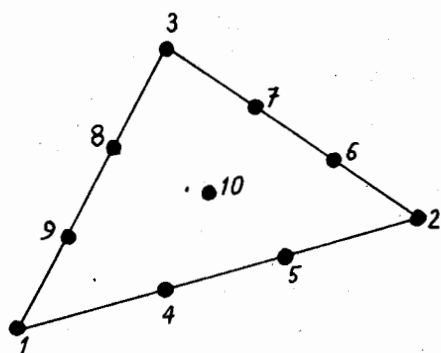
$$N_6 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3 L_2 - 1) \quad (5.47)$$

$$N_7 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3 L_3 - 1)$$

$$N_8 = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3 L_3 - 1)$$

$$N_9 = \frac{9}{2} L_1 L_3 (3 L_1 - 1)$$

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3$$



Hình 5.9. Phần tử tam giác bậc 3

Thí dụ: Tìm ma trận độ cứng phần tử tam giác tuyến tính mà các hàm nội suy biểu diễn theo các tọa độ diện tích L_1, L_2, L_3

Như đã biết ở chương 2 và chương 4, trước hết cần tìm ma trận biến dạng $[B]$

$$[B] = [\partial] [N] \quad (1)$$

Ở đây:

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \text{ và } [N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hãy:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Tìm các $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ và $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ (với $i = 1, 2, 3$):

Sử dụng (5.1) và (5.12)

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial L_j} \cdot \frac{\partial L_j}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2A} y_{ji} \frac{\partial N_i}{\partial L_j} \quad (i, j, k = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$$

Sử dụng (5.41): Vì $N_i = L_i$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\text{Để thấy rằng: } \frac{\partial N_i}{\partial L_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{với } i=j \\ 0 & \text{với } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{2A} \cdot y_{jk} \quad (\text{với } i, j, k = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \quad (3)$$

$$\text{Tương tự, } \frac{\partial N_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial L_j} \cdot \frac{\partial L_j}{\partial y} = \frac{1}{2A} x_{kj} = -\frac{1}{2A} x_{jk} \quad (\text{với } i, j, k = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \quad (4)$$

trong đó: $x_{ij} = x_i - x_j$ và $y_{ij} = y_i - y_j$

Thay (3), (4) vào (2), ta có ma trận $[B]$.

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & -x_{31} & 0 & -x_{12} \\ -x_{23} & y_{23} & -x_{31} & y_{31} & -x_{12} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Và theo (4.23) ta xác định được ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$:

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = t [B]^T [D] [B] \int_A dA = At [B]^T [D] [B]$$

Thực hiện phép nhân ma trận, ta nhận được ma trận $[K]_e$ như đã có trong bài 4-2 (thay các chỉ số nút i, j, k bằng 1, 2, 3)

§5.4. PHẦN TỬ 3 CHIỀU - KHỐI TỨ DIỆN

Như đã trình bày trong bài 5.1, trong bài toán 3 chiều, phần tử khối tứ diện 4 điểm nút là dạng phần tử đơn giản nhất. Các thành phần chuyển vị theo 3 phương x, y và z được xấp xỉ bằng các đa thức tuyến tính và được nội suy theo các chuyển vị nút của phần tử như sau:

$$u_e(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 N_i u_i = [N] \{q_u\}_e$$

$$v_e(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 N_i v_i = [N] \{q_v\}_e$$

$$w_e(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 N_i w_i = [N] \{q_w\}_e$$

Ở đây $[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$

Trong hệ tọa độ thể tích, các hàm nội suy tuyến tính N_i đã được trình bày trong bài 5.1 và là:

$$N_i = L_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5.48)$$

Còn trong phần tử khối tứ diện bậc 2 với 10 điểm nút (4 nút chính tại các đỉnh khối, 6 nút còn lại tại các điểm giữa của 6 cạnh biên khối tứ diện phần tử. Hình 5.10b). Các chuyển vị thành phần là các tổ hợp tuyến tính của 10 hàm nội suy bậc 2 tương ứng 10 điểm nút của phần tử. Thí dụ, để cho gọn, ta chỉ xét tới thành phần chuyển vị theo phương trục x tức $u_e(x, y, z)$

$$u_e(x, y, z) = \sum_{i=1}^{10} N_i u_i = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_{10} \end{bmatrix} \{q_u\}_e$$

Các hàm nội suy N_i là bậc 2 và trong hệ tọa độ thể tích là

$$N_i = L_i (2 L_i - 1) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$N_5 = 4 L_1 L_2$$

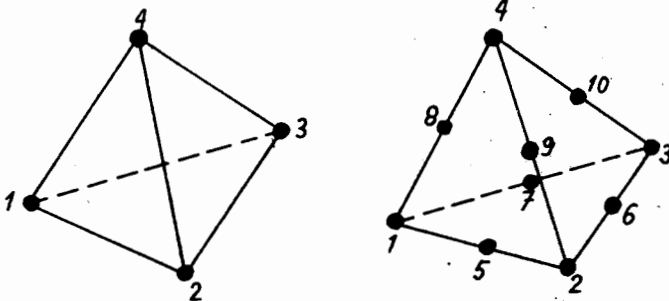
$$N_6 = 4 L_2 L_3$$

$$N_7 = 4 L_3 L_1$$

$$N_8 = 4 L_1 L_4$$

$$N_9 = 4 L_2 L_4$$

$$N_{10} = 4 L_3 L_4$$



a)

b)

Hình 5.10. Phần tử khối tứ diện:

a. Phần tử tuyến tính. b. Phần tử bậc 2

§5.5. PHẦN TỬ HAI CHIỀU DẠNG TỨ GIÁC

1. Hệ tọa độ tự nhiên và các phần tử "serendipity"

Hệ tọa độ tự nhiên cho phần tử tứ giác là 1 hệ tọa độ địa phương sao cho các trục r và s của nó đi qua các điểm giữa của các cặp cạnh đối diện nhau. Các cạnh này được xác định bởi phương trình $r = \pm 1$ và $s = \pm 1$ (Hình 5.11). Khi đó điểm P bất kỳ thuộc phần tử có tọa độ (x, y) trong hệ tọa độ vuông góc tổng thể sẽ có tọa độ (r, s) trong hệ tọa độ tự nhiên. Các tọa độ tự nhiên này là không thứ nguyên và có giá trị trong khoảng từ -1 đến 1 . Quan hệ giữa các tọa độ vuông góc và tự nhiên này được xác định như sau.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) \mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

trong đó, y_i là tọa độ vuông góc của nút i ($i = 1, 2, 3, 4$) trong hệ tọa độ tổng thể

$$N_i(r, s) = \frac{1}{4} (1 + r r_i) (1 + s s_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5.50)$$

Với (r_i, s_i) là các tọa độ tự nhiên của nút i và cụ thể dễ thấy là $(r_1, s_1) = (-1, -1)$, $(r_2, s_2) = (1, -1)$, $(r_3, s_3) = (1, 1)$ và $(r_4, s_4) = (-1, 1)$

Như vậy nếu hàm f là hàm của các tọa độ tự nhiên r và s thì đạo hàm của nó lấy đối với x và y là:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial s} \end{Bmatrix}$$

Với $[J]^{-1}$ là nghịch đảo của ma trận Jacobi của phép đổi biến và

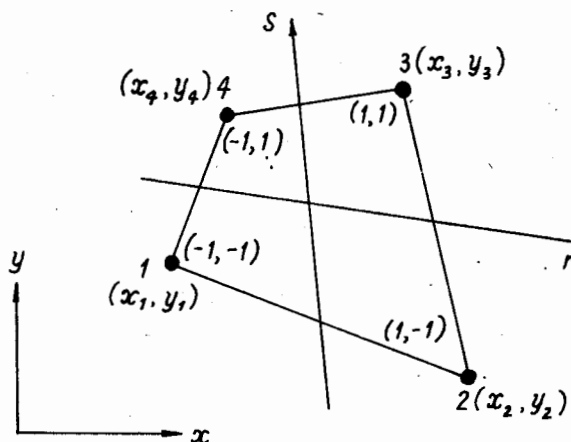
$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial r & \partial y / \partial r \\ \partial x / \partial s & \partial y / \partial s \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-s) & (1-s) & (1+s) & -(1+s) \\ -(1-r) & -(1+r) & (1+r) & (1-r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

Khi đó, cũng như bài 4.3 với hệ tọa độ vuông góc, các chuyển vị thành phần theo các phương x và y là $u(r, s)$ và $v(r, s)$ của phần tử được xấp xỉ hóa bởi các hàm

song tuyến tính có dạng như sau, chẳng hạn với chuyển vị $u(r,s)$

$$u(r,s) = a_1 + a_2 r + a_3 s + a_4 rs = [1 \ r \ s \ rs] \{q\} \quad (5.51)$$

Nếu gọi $\{q_u\}_e = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4\}^T$ là tập hợp của các chuyển vị theo phương x của các nút phần tử thì từ điều kiện đồng nhất của nó với các giá trị của hàm xấp xỉ chuyển vị u trên lấy ứng với các tọa độ tự nhiên của các nút (hình 5.11) như sau



Hình 5.11. Phần tử tứ giác và các hệ tọa độ tự nhiên (r,s) và tổng thể (x,y)

$$\{q_u\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(-1, -1) \\ u(1, -1) \\ u(1, 1) \\ u(-1, 1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [A] \{a\}$$

và ma trận $[A]$ có nghịch đảo $[A]^{-1}$ là

$$[A]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có thể biểu diễn vectơ tham số $\{a\}$ theo vectơ chuyển vị nút $\{q_u\}_e$

$$\{a\} = [A]^{-1} \{q_u\}_e$$

Thay $\{a\}$ vào (5.51) ta biểu diễn được hàm chuyển vị theo phương x theo vectơ $\{q_u\}_e$

$$u(r,s) = [1 \ r \ s \ rs] [A]^{-1} \{q_u\}_e \quad (8-37)$$

$$\text{Hay: } u(r,s) = [N] \{q_u\}_e \quad (5.52)$$

trong đó $[N]$: ma trận các hàm dạng (hay các hàm nội suy) theo hệ tọa độ tự nhiên

$$[N] = [1 \ r \ s \ rs] [A]^{-1}$$

Hay

$$[N] = [1 \quad r \quad s \quad rs] \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Và $[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$

Với $N_i = \frac{1}{4} (1 + r r_i) (1 + s s_i)$ (với $i = 1, 2, 3, 4$)

trong đó (r_i, s_i) là tọa độ tự nhiên của nút i .

Hay cụ thể hơn:

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - r) (1 - s)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + r) (1 - s)$$

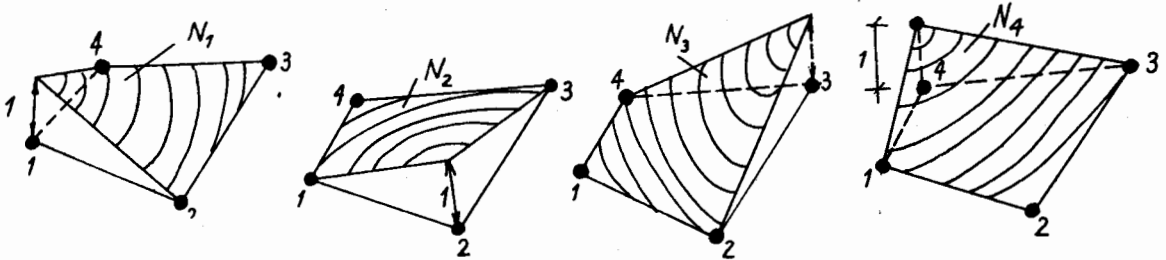
$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + r) (1 + s)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - r) (1 + s)$$

(5.53)

(2-4)

Đồ thị biểu diễn các hàm dạng hay hàm nội suy này ở hình 5.12.



Hình 5.12. Phần tử tứ giác và các hàm dạng

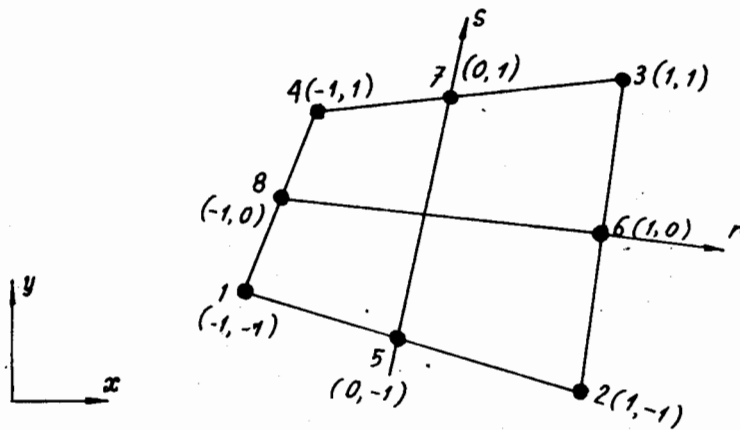
Với phần tử tứ diện bậc hai, các hàm chuyển vị được xấp xỉ hóa bởi các đa thức bậc hai trong hệ tọa độ tự nhiên như sau:

$$u(r,s) = a_1 + a_2 r + a_3 s + a_4 r^2 + a_5 rs + a_6 s^2 + a_7 r^2 s + a_8 rs^2 \quad (5.54)$$

Hay $u(r,s) = \begin{bmatrix} 1 & r & s & r^2 & rs & s^2 & r^2 s & rs^2 \end{bmatrix} \{a\}.$ (2-5)

Các số hạng r^3 và s^3 không có do yêu cầu của tính đẳng hướng hình học đã nêu trong chương 2.

Phần tử tứ giác tương ứng xấp xỉ (5.54) có 8 điểm nút, gồm 4 nút ở các đỉnh tứ giác và 4 nút là các điểm giữa các cạnh biên phần tử (hình 5.13). Trong hệ tọa độ tự nhiên dễ dàng xác định được tọa độ các nút và được biểu diễn trên hình 5.13.



Hình 5.13. Phần tử tứ giác, 8 nút. Tọa độ tự nhiên của các nút

Để tìm các hàm dạng cho phần tử này. Cũng theo cách đi đã nói ở trên, tức là từ điều kiện đồng nhất giữa các bậc tự do là chuyển vị theo phương x của các nút với giá trị hàm xấp xỉ (5.54) tại các nút phần tử như sau.

$$\{q_u\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u(-1, -1) \\ u(1, -1) \\ u(1, 1) \\ u(-1, 1) \\ u(0, -1) \\ u(1, 0) \\ u(0, 1) \\ u(-1, 0) \end{Bmatrix} = [A] \{a\}$$

Với ma trận $[A]$ là

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Với nghịch đảo của $[A]$ dễ dàng nhận được (vì $[A]$ là ma trận số)

$$[A]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vậy $\{a\} = [A]^{-1}\{q_u\}_e$

Thay $\{a\}$ vào (5.54), cuối cùng ta có biểu thức quen thuộc

$$u(r,s) = [N] \{q_u\}_e$$

Với $[N] = \begin{bmatrix} 1 & r & s & r^2 & rs & s^2 & r^2s & rs^2 \end{bmatrix} [A]^{-1}$

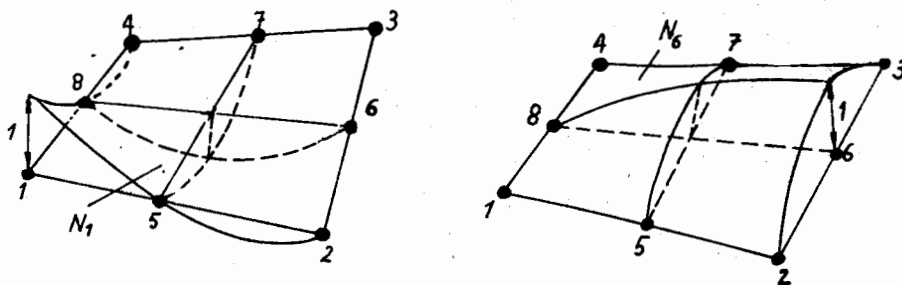
Thực hiện nhân ma trận, cuối cùng ta nhận được ma trận các hàm dạng

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_8 \end{bmatrix}$$

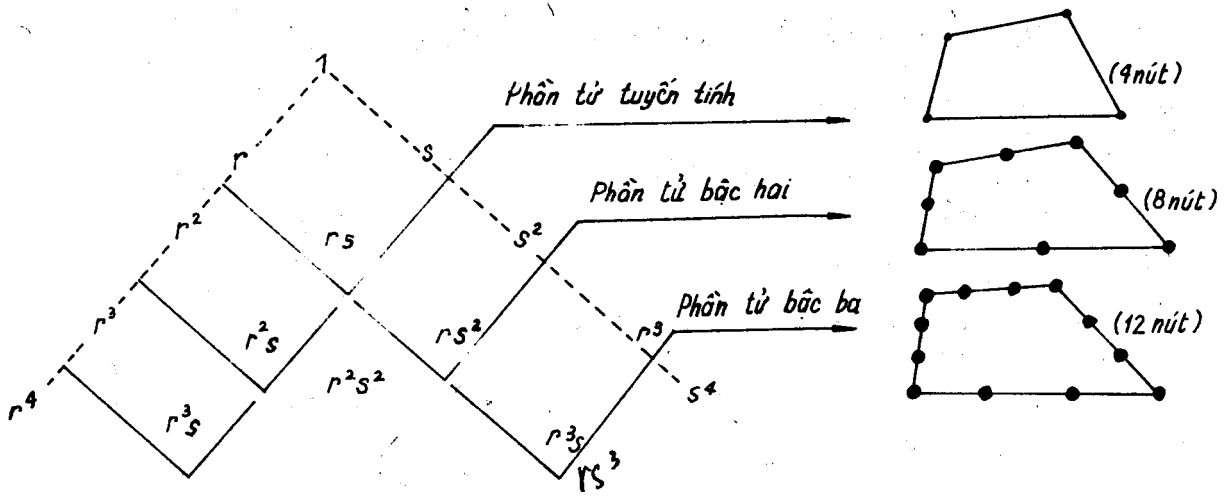
Ở đây:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4} (1 + r r_1) (1 + s s_1) (r r_1 + s s_1 - 1) & (\text{với } i = 1, 2, 3, 4) \\ N_5 = \frac{1}{2} (1 - r^2) (1 + s s_5) \\ N_6 = \frac{1}{2} (1 + r r_6) (1 - s^2) \\ N_7 = \frac{1}{2} (1 - r^2) (1 + s s_7) \\ N_8 = \frac{1}{2} (1 + r r_8) (1 - s^2) \end{cases} \quad \begin{matrix} (5.55) \\ (2-6) \end{matrix}$$

Hình 5.14 giới thiệu đồ thị của hàm nội suy tương ứng một nút góc và một nút trên cạnh biên phần tử tứ giác, 8 nút.



Hình 5.14. Hàm dạng N_1 và N_6

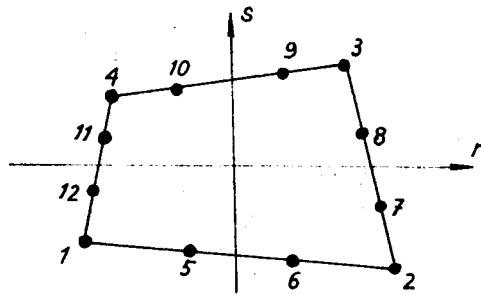


Hình 5.15. Tam giác Pascal và các phần tử Serendipity.

Tương tự với phần tử bậc vừa nêu ở trên, ở phần tử serendipity bậc ba với 12 nút nằm trên biên và các đỉnh phần tử, theo tam giác Pascal (hình 5.15), các chuyển vị theo các phương x,y của phần tử được xấp xỉ hóa bởi các đa thức bậc ba trong hệ tọa độ tự nhiên có dạng

$$\begin{aligned}
 u(r,s) = & a_1 + a_2 r + a_3 s + a_4 r^2 + a_5 rs + a_6 s^2 + a_7 r^3 + a_8 r^2 s + a_9 rs^2 \\
 & + a_{10} r^3 + a_{11} r^3 s + a_{12} rs^3
 \end{aligned} \quad (5.56)$$

(7-7)



Hình 5.16. Phần tử tứ giác bậc 3 và các nút.

Và nếu biểu diễn theo các chuyển vị nút phần tử, thì có thể viết ở dạng

$$u(r,s) = [N] \{q_u\}_e$$

$$v(r,s) = [N] \{q_v\}_e$$

$$\text{trong đó } [N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_{12} \end{bmatrix}$$

với N_i là hàm dạng hay hàm nội suy bậc 3 tương ứng nút i

Việc tìm các hàm dạng bậc ba này đã nói ở trên. Các hàm này như sau:

Với các nút đỉnh tứ giác, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + r r_i) (1 + s s_i) (9 r^2 + 9 s^2 - 10)$$

Với các nút $i = 7, 8, 11, 12$.

(5.57)

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + r r_i) (1 - s^2) (1 + 9 s s_i)$$

(7-8)

Với các nút $i = 5, 6, 9, 10$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + s s_i) (1 - r^2) (1 + 9 r r_i)$$

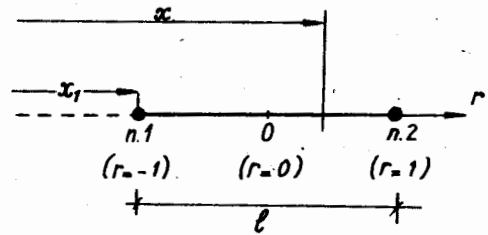
Ở đây (r_i, s_i) là các tọa độ tự nhiên của nút i và xác định được một cách dễ dàng trong hệ tọa độ địa phương rs .

2. Các phần tử Lagrange.

Xét phần tử một chiều ở bài 5.2, để có thể sử dụng cho việc tìm các hàm dạng của phần tử hai chiều và ba chiều, ta cũng định ra trên phần tử 1 chiều này hệ tọa độ tự nhiên r có gốc tại điểm giữa phần tử và sao cho tọa độ r của các điểm trên phần tử sẽ có giá trị trong khoảng từ -1 đến 1 . (Hình 5.17).

Khi đó tọa độ tổng thể x và tọa độ tự nhiên r của điểm bất kỳ thuộc phần tử có quan hệ được xác định như sau.

$$r = \frac{2(x - x_1)}{l} - 1$$



Hình 5.17. Hệ tọa độ tự nhiên với phần tử 1 chiều.

Sử dụng công thức (5.29) hoặc (5.28), dễ thấy rằng các hàm nội suy Lagrange bậc n tương ứng nút i trong hệ tọa độ tự nhiên có dạng:

$$N_i = f_i(r) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \frac{(r - r_k)}{(r_i - r_k)} \quad (5.58)$$

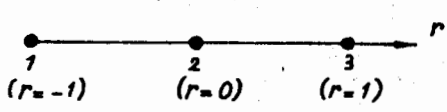
Ở đây r_i là tọa độ tự nhiên của nút i ($i = 1, 2, \dots, n + 1$)

Sử dụng (5.58) ta có các hàm nội suy của các phần tử 1 chiều như sau:

Với phần tử tuyến tính 2 điểm nút (hình 5.17)

$$\left. \begin{aligned} N_1(r) = f_1(r) &= \frac{(r - r_2)}{(r_1 - r_2)} = \frac{(r - 1)}{-1 - (1)} = \frac{1}{2} (1 - r) \\ N_2(r) = f_2(r) &= \frac{(r - r_1)}{(r_2 - r_1)} = \frac{(r + 1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} (1 + r) \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

Với phần tử bậc 2 (3 điểm nút).



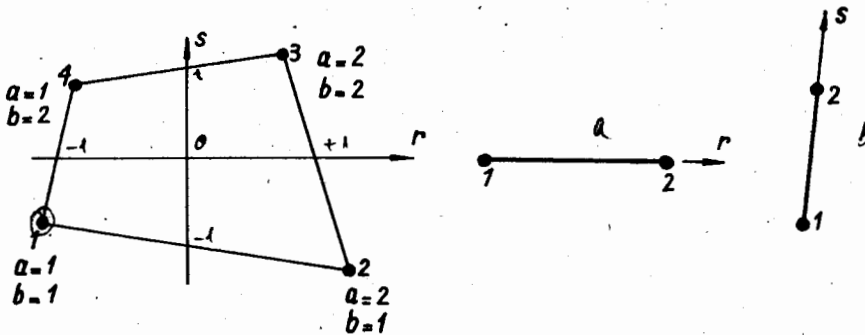
$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(r) = f_1(r) = \frac{1}{2} r (r - 1) \\ N_2(r) = f_2(r) = (1 - r^2) \\ N_3(r) = f_3(r) = \frac{1}{2} r (r + 1) \end{array} \right. \quad (5.60)$$

Với phần tử 2 chiều dạng tứ giác, các hàm nội suy Lagrange cũng có thể tìm được dễ dàng bằng cách nhân các hàm Lagrange một chiều theo 2 phương r và s như sau:

$$N_i(r,s) = f_a(r) f_b(s) \quad (5.61)$$

trong đó chú ý các chỉ số a, b phải là tương ứng với các nút a, b của phần tử 1 chiều

Với phần tử tứ giác song tuyến tính (4 nút): Hình 5.18.



Hình 5.18. Phần tử tứ giác 4 nút.

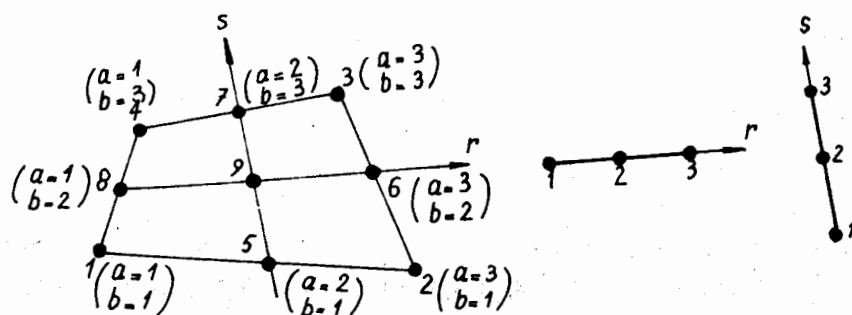
Theo (5.61), sử dụng (5.59) và hình 5.18, ta dễ nhận được các hàm dạng song tuyến tính trong hệ tọa độ tự nhiên (r,s) như sau.

$$\begin{aligned} N_1(r,s) &= f_1(r) \cdot f_1(s) = \frac{1}{4} (1 - r) (1 - s) \\ N_2(r,s) &= f_2(r) \cdot f_1(s) = \frac{1}{4} (1 + r) (1 - s) \\ N_3(r,s) &= f_2(r) \cdot f_2(s) = \frac{1}{4} (1 + r) (1 + s) \\ N_4(r,s) &= f_1(r) \cdot f_2(s) = \frac{1}{4} (1 - r) (1 + s) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Kết quả này giống như kết quả (5.53) đã nhận được ở trên.

Với phần tử tứ giác bậc hai (phần tử 9 nút) như hình 5.19.

Thay các hàm nội suy Lagrange 1 chiều bậc hai trong (5.60) vào công thức (5.61) với các chỉ số a, b thích hợp cho trong hình 5.19, ta dễ dàng tìm được 9 hàm nội suy Lagrange bậc hai cho phần tử 9 nút.



Hình 5.19. Phần tử tứ giác, 9 nút và các chỉ số a, b thích hợp.

$$N_1(r,s) = f_1(r) \cdot f_1(s) = \frac{1}{4} rs (r-1) (s-1)$$

$$N_2(r,s) = f_3(r) \cdot f_1(s) = \frac{1}{4} rs (r+1) (s-1)$$

$$N_3(r,s) = f_3(r) \cdot f_3(s) = \frac{1}{4} rs (r+1) (s+1)$$

$$N_4(r,s) = f_1(r) \cdot f_3(s) = \frac{1}{4} rs (r-1) (s+1)$$

$$N_5(r,s) = f_2(r) \cdot f_1(s) = \frac{1}{2} s (1-r^2) (s-1) \quad (5.63)$$

$$N_6(r,s) = f_3(r) \cdot f_2(s) = \frac{1}{2} r (r+1) (1-s^2)$$

$$N_7(r,s) = f_2(r) \cdot f_3(s) = \frac{1}{2} s (1-r^2) (s+1)$$

$$N_8(r,s) = f_1(r) \cdot f_2(s) = \frac{1}{2} r (r-1) (1-s^2)$$

$$N_9(r,s) = f_2(r) \cdot f_2(s) = (1-r^2) (1-s^2)$$

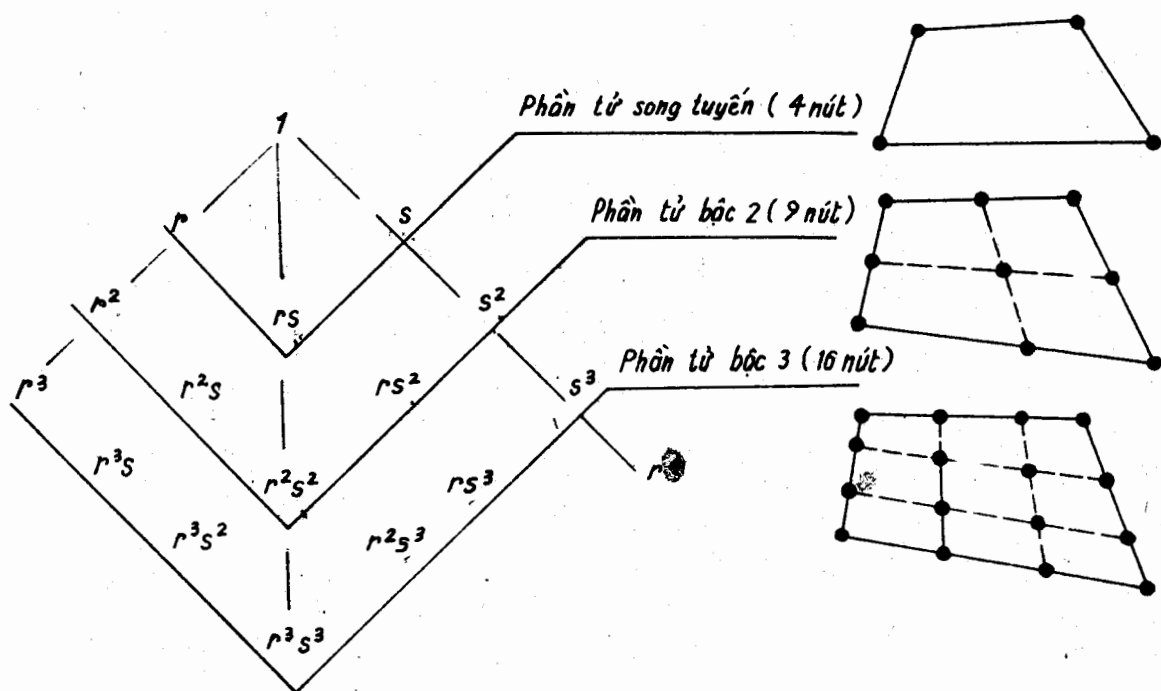
Hàm chuyển vị thành phần trong trường hợp này được xấp xỉ bởi đa thức dạng

$$u(r,s) = \begin{bmatrix} 1 & r & s & r^2 & rs & s^2 & r^2s & rs^2 & r^2s^2 \end{bmatrix} \{a\}$$

Với vectơ các tham số $\{a\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \dots a_{12}\}^T$

Với phần tử tứ giác Lagrange bậc ba cũng thực hiện của các chuyển vị thành phần có thể thấy ở hình 5.20.

tự. Đa thức xấp xỉ



Hình 5.20. Phần tử Lagrange và tam giác Pascal.

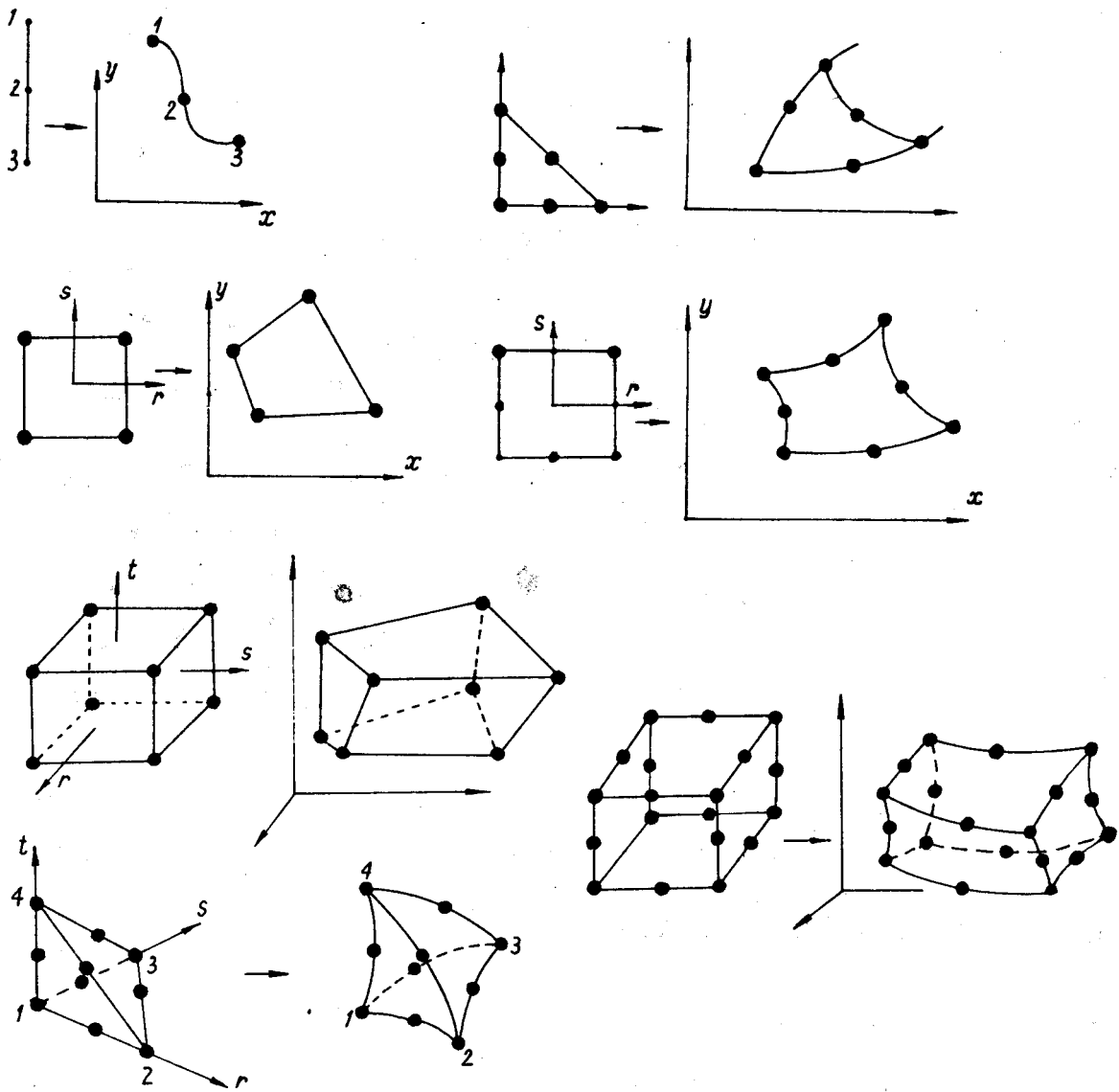
§5.6. PHẦN TỬ ĐẲNG THAM SỐ.

1. Phần tử đẳng tham số.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn khi miền khảo sát là đường cong hoặc có biên là các đường cong, mặt cong thì nếu chỉ sử dụng các phần tử 1 chiều thẳng, các phần tử 2 chiều dạng tam giác, tứ giác hay các phần tử 3 chiều dạng khối bốn mặt, khối sáu mặt thì không đủ bảo đảm độ chính xác của kết quả. Điều này đã dẫn đến việc xây dựng và phát triển các phần tử có dạng hình học bất kỳ hơn với các biên là đường cong hay mặt cong. Các phần tử này được gọi là phần tử có biên cong và thường được gọi là phần tử đẳng tham số (isoparametric element).

Khái niệm về phần tử đẳng tham số dựa trên cơ sở phép biến đổi một phần tử được gọi là phần tử chuẩn (master element) trong hệ tọa độ tự nhiên thành phần tử thực tương ứng có dạng tùy ý hơn trong hệ tọa độ vuông góc như các thí dụ trong hình 5.21.

Như vậy phải có một mối quan hệ giữa tọa độ 1 điểm $P(x,y,z)$ bất kỳ thuộc phần tử thực trong hệ tọa độ vuông góc tổng thể xyz và điểm tương ứng $P'(r,s,t)$ thuộc phần tử chuẩn trong hệ tọa độ tự nhiên địa phương rst . Nếu phần tử có n nút thì mối quan hệ giữa các tọa độ này được viết như sau.



Hình 5.21. Các phần tử đẳng tham số và phép biến đổi.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n N'_i(r,s,t) \mathbf{x}_i = N'_1 \mathbf{x}_1 + N'_2 \mathbf{x}_2 + \dots + N'_n \mathbf{x}_n = [\mathbf{N}'] \{\mathbf{x}_n\}_e \\
 \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^n N'_i(r,s,t) \mathbf{y}_i = N'_1 \mathbf{y}_1 + N'_2 \mathbf{y}_2 + \dots + N'_n \mathbf{y}_n = [\mathbf{N}'] \{\mathbf{y}_n\}_e \\
 \mathbf{z} &= \sum_{i=1}^n N'_i(r,s,t) \mathbf{z}_i = N'_1 \mathbf{z}_1 + N'_2 \mathbf{z}_2 + \dots + N'_n \mathbf{z}_n = [\mathbf{N}'] \{\mathbf{z}_n\}_e
 \end{aligned} \quad (5.64)$$

trong đó: $\{\mathbf{x}_n\}_e$, $\{\mathbf{y}_n\}_e$, $\{\mathbf{z}_n\}_e$ là các vectơ tọa độ các nút phần tử thực trong hệ tọa độ vuông góc tổng thể.

Còn $[\mathbf{N}']$ là ma trận các hàm dạng của phần tử chuẩn được biểu diễn qua các tọa độ tự nhiên r, s, t . Các hàm $[\mathbf{N}']$ còn được gọi là các hàm nội suy tọa độ. Các

hàm dạng $[N']$ được dùng trong phép biến đổi (5.64) giúp ta xác định dạng hình học của phần tử thực n nút trong hệ tọa độ vuông góc.

Như đã nói ở các bài trên, trong phương pháp PTHH, khi đã biết các chuyển vị nút phần tử, tức biết $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), \dots (u_n, v_n, w_n)$ hay biết $\{q_u\}_e, \{q_v\}_e$ và $\{q_w\}_e$ thì có thể xác định được các chuyển vị thành phần u, v, w tại một điểm bất kỳ thuộc phần tử nhờ vào các hàm dạng hay hàm nội suy chuyển vị $[N]$, bằng các quan hệ quen thuộc sau:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n N_i u_i = [N] \{q_u\}_e \\ v &= \sum_{i=1}^n N_i v_i = [N] \{q_v\}_e \\ w &= \sum_{i=1}^n N_i w_i = [N] \{q_w\}_e \end{aligned} \quad (5.65)$$

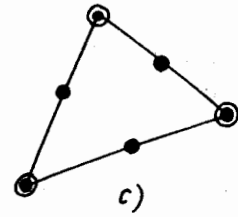
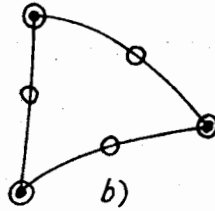
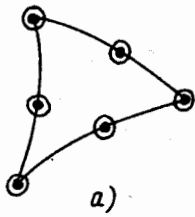
Nếu trong phép biến đổi (5.64) các hàm nội suy tọa độ $[N']$ là đồng nhất với các hàm nội suy chuyển vị $[N]$ thì phần tử được gọi là đẳng tham số (isoparametric element), tức là khi đó

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n N_i x_i = [N] \{x_n\}_e \\ y &= \sum_{i=1}^n N_i y_i = [N] \{y_n\}_e \\ z &= \sum_{i=1}^n N_i z_i = [N] \{z_n\}_e \end{aligned} \quad (5.66)$$

Nói cách khác, phần tử đẳng tham số là phần tử mà số các tham số dùng để nội suy dạng hình học của nó đúng bằng số tham số dùng để nội suy các hàm chuyển vị. Và khi đó các hàm nội suy dùng để xấp xỉ trường chuyển vị cũng là hàm nội suy dùng để xấp xỉ trường tọa độ.

Trong các trường hợp khi sự xấp xỉ trường tọa độ được sử dụng các hàm nội suy có bậc cao hơn so với trường chuyển vị, tức số tham số để biểu diễn dạng hình học của phần tử là nhiều hơn số tham số có mặt trong các đa thức xấp xỉ của trường chuyển vị, thì phần tử được gọi là phần tử "nhiều tham số" (superparametric element). Với phần tử "nhiều tham số" số nút dùng để mô tả dạng hình học phần tử là nhiều hơn số nút dùng để xấp xỉ hóa trường chuyển vị.

Trường hợp ngược lại, khi số nút dùng để xấp xỉ hóa trường chuyển vị là nhiều hơn số nút để mô tả dạng hình học phần tử thì phần tử được gọi là phần tử "ít tham số" (subparametric element).



Hình 5.22. Phần tử và hệ thống các nút khác nhau.

Nút $\bullet$: để nội suy tọa độ; Nút $\circ$: để nội suy trường chuyển vị

a. Phần tử đẳng tham số. b. Phần tử nhiều tham số c. Phần tử ít tham số.

Hình 5.22 giới thiệu một thí dụ minh họa các loại phần tử vừa nói ở trên cùng hệ thống các nút sử dụng trong cả hai phép nội suy tọa độ và chuyển vị. Tuy nhiên, trong thực tế người ta thường dùng hơn cả là phần tử đẳng tham số bởi cùng sử dụng hệ thống các nút, hệ thống các hàm nội suy $[N]$ trong cả 2 phép biến đổi tọa độ và xấp xỉ trường chuyển vị nên thủ tục tính toán đơn giản hơn, dễ hiểu hơn.

Để đơn giản, bài này sẽ chỉ trình bày phần tử đẳng tham số 2 chiều còn với phần tử 3 chiều thì cũng hoàn toàn tương tự.

Như đã biết trong chương 2, trong các bài toán cơ học vật rắn biến dạng và cơ kết cấu ma trận độ cứng phần tử và vectơ tải phần tử được cho bởi các công thức

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \quad (5.67)$$

$$\{P\}_e = \int_{V_e} [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dV + \int_{V_e} [N]^T \{g\} dV + \int_{S_e} [N]^T \{p\} dV \quad (5.68)$$

Với trường hợp bài toán phẳng đang xét, các hàm chuyển vị theo phương x và phương y là u và v được nội suy theo các chuyển vị nút như đã cho trong (5.65) có thể được viết trong dạng chung như sau

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n N_i u_i \\ \sum_{i=1}^n N_i v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}_e \quad (5.69)$$

Hay gọn hơn:

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_e [N] \{q\}_e$$

Ở đây: $[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{bmatrix}$ (5.70)

$$\{q\}_e = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n\}^T$$

Còn biến dạng của phần tử

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \{q\}_e$$

trong đó:

$$[B] = [\partial] [N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

Chú ý rằng N_i là các hàm nội suy tương ứng với nút i được biểu diễn theo các tọa độ tự nhiên (r,s) hay (L_1, L_2, L_3) nhưng trong (5.71) thì là đạo hàm các hàm N_i là lấy đối với biến x và y của hệ tọa độ vuông góc. Và các đạo hàm này được tìm như sau:

Theo quy tắc đạo hàm hàm hợp, ta có

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

tương tự như vậy

$$\frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

Hay:
$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.72)$$

Ở đây ma trận $[J]$ là ma trận Jacobi của phép biến đổi tọa độ và

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Vì phần tử là đẳng tham số, nên các tọa độ x và y được biểu diễn như (5.66) tức là:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i y_i$$

Hay ở dạng ma trận

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \quad (5.74)$$

trong đó ma trận $[N]$ có dạng như (5.70)

Từ (5.66) chúng ta cũng dễ dàng tìm được các đạo hàm của x và y lấy theo các tọa độ tự nhiên v và x . Và do đó ma trận Jacobi là như sau.

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Và nghịch đảo của ma trận $[J]$ có dạng

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Với $|J|$ là định thức của ma trận Jacobi và

$$|J| = \det [J] = J_{11} \cdot J_{22} - J_{21} \cdot J_{12} \neq 0 \quad (5.77)$$

Vậy từ (5.72) ta có thể tìm được các đạo hàm của hàm N_i theo x và y

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (5.78)$$

Chú ý rằng nghịch đảo của $[J]$ tồn tại khi có sự tương quan một - một giữa các tọa độ tự nhiên và tọa độ vuông góc được cho bởi (5.66) hay (5.74). Điều kiện này cũng ấn định một hạn chế nào đó đối với phần tử, thí dụ, các góc trong của phần tử không nên là quá nhỏ hay quá lớn. Cũng như cần tránh việc biến đổi tọa độ của 1 hệ tọa độ thuận vào 1 hệ tọa độ nghịch vì điều này dẫn tới một ma trận Jacobi âm. (Điều này có nghĩa là nếu hệ tọa độ tổng thể là thuận thì việc đánh số nút phần tử phải theo chiều ngược kim đồng hồ).

Ngoài ra, cũng cần nhớ rằng trong các biểu thức tích phân trong (5.67) và (5.68)

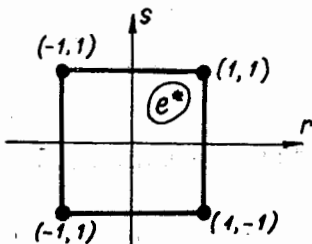
$$dV = t \, dx \, dy = t \, \det [J] \, dr \, ds$$

$$\text{và} \quad [K] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \cdot \det [J] \, dr \, ds \quad (5.79)$$

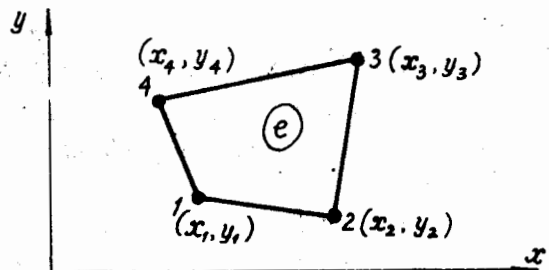
Với biểu thức tích phân trong công thức xác định vectơ tải phần tử cũng tương tự. Có thể thấy rằng trong (5.79) các ma trận được biểu diễn theo r và s , tuy nhiên nói chung ta không thể tính được tích phân này ở dạng đóng vì biểu thức tích phân chứa định thức $|J|$ là các đa thức của r và s ở mẫu số. Nên ta sẽ dùng tích phân số để tính (5.79).

Sau đây, như những thí dụ, ta sẽ xét cụ thể với phần tử 2 chiều dạng tứ giác, và dạng tam giác đơn giản.

Xét phần tử đẳng tham số tứ giác bốn điểm nút trong hệ tọa độ vuông góc tổng thể (hình 5.23b) các đỉnh là các nút 1, 2, 3, 4 và mang các tọa độ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) và (x_4, y_4) một cách tương ứng. Trong hệ tọa độ tự nhiên, phần tử chuẩn tương ứng trở thành một hình vuông mà các đỉnh có tọa độ tự nhiên dễ thấy là $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ và $(-1, 1)$.



a) Phần tử chuẩn trong hệ tọa độ tự nhiên



b) Phần tử đẳng tham số trong hệ tọa độ vuông góc tổng thể

Hình 5.23. Phần tử đẳng tham số dạng tứ giác bốn điểm nút

Vì phần tử là đồng tham số nên các hàm nội suy trường chuyển vị trong hệ tọa độ tự nhiên như đã được trình bày ở bài §5.5 cũng sẽ là các hàm nội suy tọa độ (hay hình học). Hay cụ thể

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (5.80a)$$

trong đó N_i là các hàm nội suy đã tìm được như trong (5.53) như sau

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4} (1 - r) (1 - s) \\ N_2 = \frac{1}{4} (1 + r) (1 - s) \\ N_3 = \frac{1}{4} (1 + r) (1 + s) \\ N_4 = \frac{1}{4} (1 - r) (1 + s) \end{cases} \quad (5.80b)$$

Hay $N_i(r, s) = \frac{1}{4} (1 + r r_i) (1 + s s_i)$ với $i = 1, 2, 3, 4$.

trong đó (r_i, s_i) là tọa độ tự nhiên của nút i .

Như vậy, có thể thấy rằng phép biến đổi tọa độ (5.80) biến một phần tử chuẩn hình vuông bốn nút trong hệ tọa độ địa phương (r, s) thành một phần tử tứ giác trong hệ tọa độ tổng thể thực (x, y) mà hình dạng và kích thước của nó được xác định bởi tám tọa độ nút $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$. Phương trình (5.80a) cũng cho:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad \text{và} \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

Thay các hàm N_i cho trong (5.80b) vào (5.75) ta có được ma trận Jacobi

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-s) & (1-s) & (1+s) & -(1+s) \\ -(1-r) & -(1+r) & (1+r) & (1-r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Hay $[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$ là xác định.

Nghịch đảo của $[J]$ là:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix}$$

Ở đây: $J_{11}^* = \frac{J_{22}}{|J|}, \quad J_{12}^* = \frac{-J_{12}}{|J|}, \quad J_{21}^* = \frac{J_{21}}{|J|}, \quad J_{22}^* = \frac{J_{11}}{|J|}$

Với $|J| = J_{11} \cdot J_{22} - J_{21} \cdot J_{12}$ (5.82)

Vậy, các đạo hàm lấy đối với các tọa độ vuông góc x, y sẽ là

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{11}^* \frac{\partial}{\partial r} + J_{12}^* \frac{\partial}{\partial s} \\ J_{21}^* \frac{\partial}{\partial r} + J_{22}^* \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (5.83)$$

Vì các hàm chuyển vị u và v là hàm của tọa độ tự nhiên r, s .

$$u(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad v(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

Hay ở dạng ma trận

$$\begin{Bmatrix} u(r, s) \\ v(r, s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{q\}_e \quad (5.84)$$

Với $\{q\}_e = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}^T$ là vectơ các chuyển vị nút theo các trục tọa độ tổng thể x, y

Vì các hàm chuyển vị u và v là các hàm của tọa độ r, s . Nên sử dụng (5.83) để tìm các thành phần biến dạng theo các phương x và phương y , như sau

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = J_{11}^* \frac{\partial u}{\partial r} + J_{12}^* \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = J_{21}^* \frac{\partial v}{\partial r} + J_{22}^* \frac{\partial v}{\partial s}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = J_{21}^* \frac{\partial u}{\partial r} + J_{22}^* \frac{\partial u}{\partial s} + J_{11}^* \frac{\partial v}{\partial r} + J_{12}^* \frac{\partial v}{\partial s}$$

Hay ở dạng ma trận, ta có vectơ trường biến dạng của phần tử

$$\{\epsilon\}_e = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{11}^* & J_{12}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (5.85)$$

Mặt khác, từ (5.84), ta dễ dàng nhận được:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix} \{q\}_e \quad (5.86a)$$

Hay, cụ thể

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-s) & 0 & (1-s) & 0 & (1+s) & 0 & -(1+s) & 0 \\ -(1-r) & 0 & -(1+r) & 0 & (1+r) & 0 & (1-r) & 0 \\ 0 & -(1-s) & 0 & (1-s) & 0 & (1+s) & 0 & -(1+s) \\ 0 & -(1-r) & 0 & -(1+r) & 0 & (1+r) & 0 & (1-r) \end{bmatrix} \{q\}_e \quad (5.86b)$$

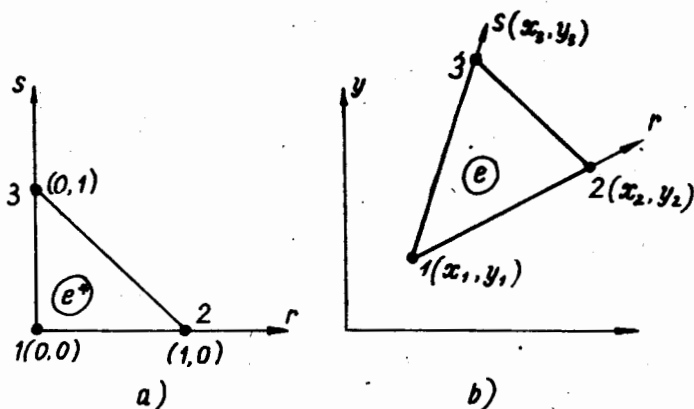
Thay (5.86) vào (5.85) ta xác định được ma trận biến dạng [B] sao cho

$$\{\epsilon\}_e = [B] \{q\}_e$$

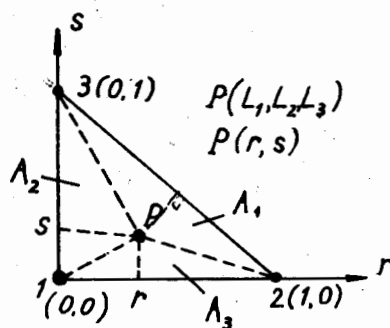
Và rồi ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ được tính theo (5.79)

$$[K]_e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det [J] dr ds$$

Phần tử đẳng tham số dạng tam giác được phát triển từ phần tử chuẩn là một tam giác vuông cân trong hệ tọa độ tự nhiên như hình 5.24



Hình 5.24. Phần tử đẳng tham số tam giác ba nút.



Hình 5.25. Quan hệ giữa tọa độ tự nhiên (r, s) và tọa độ diện tích (L_1, L_2, L_3)

Vì phần tử là đồng tham số, nên với phần tử tam giác ba nút, phép biến đổi tọa độ từ tọa độ tự nhiên sang tọa độ vuông góc là như sau

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^3 N_i y_i$$

Hay ở dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

Ở đây N_i là các hàm nội suy trong hệ tọa độ tự nhiên (r, s) , với

$$\begin{cases} N_1 = 1 - r - s \\ N_2 = r \\ N_3 = s \end{cases} \quad (5.87)$$

(5.87) nhận được từ kết quả đã biết ở bài 5.1 hoặc 5.2, khi chúng ta có thể chỉ ra mối quan hệ giữa các tọa độ tự nhiên (r, s) và các tọa độ diện tích (L_1, L_2, L_3) . Thật vậy, điểm P bất kỳ thuộc phần tử tam giác chuẩn (hình 5.25) có tọa độ (r, s) trong hệ tọa độ tự nhiên và có tọa độ (L_1, L_2, L_3) trong hệ tọa độ diện tích.

Theo định nghĩa của các tọa độ diện tích, dễ thấy rằng

$$L_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{\frac{1}{2} r \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1} = r$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{\frac{1}{2} \cdot s \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1} = s$$

Và vì $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ nên

$$L_1 = 1 - L_2 - L_3 = 1 - r - s.$$

$$\text{Tóm lại: } \begin{cases} L_1 = 1 - r - s \\ L_2 = r \\ L_3 = s \end{cases} \quad (5.88)$$

Mà công thức (5.41) cho biết hàm-nội suy của phần tử tam giác ba nút là

$$N_i = L_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Đây chính là công thức (5.87) cho ta các hàm nội suy N_i theo tọa độ r, s . Công thức (5.88) sẽ giúp ta dễ dàng tìm được các hàm nội suy cho phần tử tam giác sáu nút để xây dựng các phần tử đẳng tham số dạng tam giác sáu nút.

Để tìm ma trận độ cứng phần tử đẳng tham số tam giác ba nút, trước hết ta cần tìm ma trận Jacobi của phép biến đổi tọa độ

Sử dụng (5.75) và (5.87) ta có

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{bmatrix}$$

$$\text{Hay: } [J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix}$$

trong đó $x_{ij} = x_i - x_j$; $y_{ij} = y_i - y_j$

$$\text{Và } [J]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

trong đó $2A = |J| = x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21} = 2$ lần diện tích tam giác phần tử

Sử dụng (5.85), ta có

$$\{\epsilon\}_e = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{31} & x_{21} \\ -x_{31} & x_{21} & y_{31} & -y_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u / \partial r \\ \partial u / \partial s \\ \partial v / \partial s \end{Bmatrix}$$

Theo (5.86a) với các hàm dạng N_i trong (5.87), ta có

$$\begin{Bmatrix} \partial u / \partial r \\ \partial u / \partial s \\ \partial v / \partial r \\ \partial v / \partial s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{q\}_e$$

Thay vào phương trình trên, ta có

$$\{\varepsilon\}_e = [B] \{q\}_e$$

trong đó ma trận biến dạng $[B]$ là

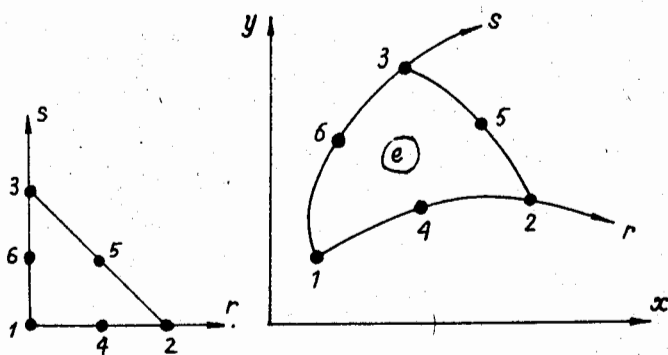
$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{31} & x_{21} \\ -x_{31} & x_{21} & y_{31} & -y_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện phép nhân đơn giản này ta sẽ nhận được ma trận $[B]$ như đã có ở chương 4, hay như kết quả của thí dụ trong bài 5.3 ở trên. Cũng theo các bước tiến hành như vậy chúng ta sẽ xác định được ma trận $[B]$ và rồi là ma trận độ cứng $[K]_e$, vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ đối với phần tử tam giác đẳng tham số 6 nút. Khi đó phần tử chuẩn là tam giác vuông cân 6 nút trong hệ tọa độ tự nhiên còn phần tử thực là phần tử tam giác 6 nút có biên cong (nếu các nút trên mỗi cạnh là không thẳng hàng) hoặc biên thẳng (nếu các nút trên các cạnh là thẳng hàng) (hình 5.26. Như ở bài 5.3 đã trình bày, với phần tử tam giác 6 nút, thì các hàm nội suy trường chuyển vị sẽ là bậc hai và biểu diễn theo các tọa độ diện tích như đã có ở (5.44) là:

$$\begin{cases} N_1 = L_1 (2L_1 - 1) \\ N_4 = 4L_1L_2 \\ N_5 = 4L_2L_3 \\ N_6 = 4L_3L_1 \end{cases} \quad (\text{với } i = 1, 2, 3)$$

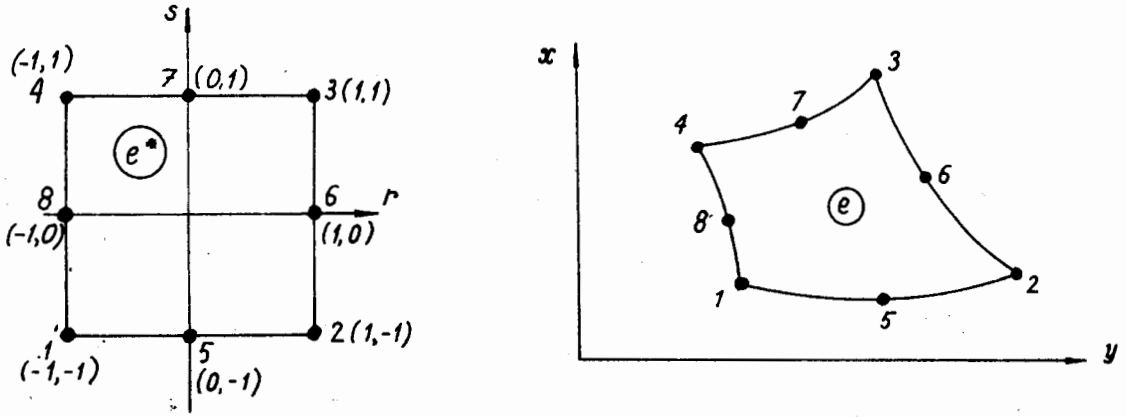
Trong hệ tọa độ (r, s) , sử dụng (5.88) ta dễ dàng chuyển được các hàm nội suy trên biểu diễn theo các tọa độ tự nhiên (r, s) . Và 6 hàm nội suy này là:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - r - s)(1 - 2r - 2s) \\ N_2 &= r(2r - 1) \\ N_3 &= s(2s - 1) \\ N_4 &= 4r(1 - r - s) \\ N_5 &= 4rs \\ N_6 &= 4s(1 - r - s) \end{aligned} \quad (5.89)$$



Hình 5.26. Phần tử tam giác đẳng tham số 6 nút sau điểm nút.

Với phần tử tứ giác đẳng tham số 8 nút, phần tử chuẩn là hình vuông có các tọa độ nút theo hệ tọa độ tự nhiên cho trong hình 5.27. Còn phần tử thực là các phần tử tứ giác 8 nút có biên cong (hoặc thẳng). Các hàm nội suy tọa độ có thể nhận được dễ dàng bằng cách sử dụng các hàm nội suy chuyển vị đã cho trong công thức (5.55) ở bài 5-5 và các tọa độ (r_i, s_i) của các nút ở hình 5.27.



Hình 5.27. Phần tử tứ giác đẳng tham số 8 nút.

Cuối cùng, ta có:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{1}{4}(1-r)(1-s)(1+r+s) & N_5 &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s) \\
 N_2 &= -\frac{1}{4}(1+r)(1-s)(1-r+s) & N_6 &= \frac{1}{2}(1+r)(1-s^2) \\
 N_3 &= -\frac{1}{4}(1+r)(1+s)(1-r-s) & N_7 &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s) \\
 N_4 &= -\frac{1}{4}(1-r)(1+s)(1+r-s) & N_8 &= \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2)
 \end{aligned} \tag{5.90}$$

2. Tích phân số.

Như đã nói ở trên, với phần tử đẳng tham số, các biểu thức tích phân xác định $[K_e]$ và $\{P\}_e$ là các tích phân xác định với các cận là 1 và -1, nhưng do chứa các đa thức ở mẫu nên nói chung là không nhận được kết quả tích phân ở dạng tường minh. Do vậy cần sử dụng các phép tích phân số.

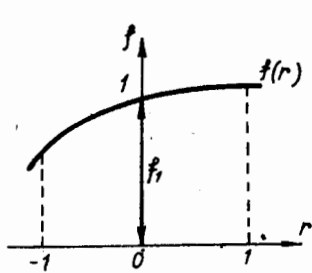
Có một vài phương pháp tích phân số để tính các tích phân xác định. Tuy nhiên phương pháp cầu phương Gauss được sử dụng rộng rãi trong phương pháp PTHH và do vậy tài liệu này cũng chỉ giới thiệu phương pháp Gauss mà thôi.

Xét tích phân xác định của bài toán một chiều như sau:

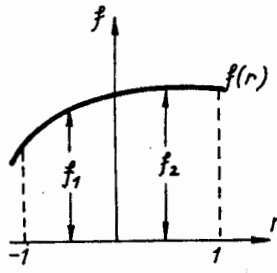
$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr \tag{5.91}$$

Cách đơn giản và gần đúng nhất là xem tích phân trên là bằng tích của giá trị của f tại điểm giữa khoảng tích phân với chiều dài của khoảng tích phân đó (hình 5.28) tức là xem gần đúng.

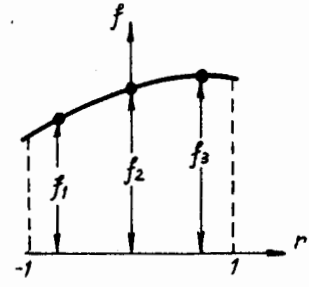
$$I = 2f(0) = 2 f_1$$



a) Dùng 1 điểm



b) Dùng 2 điểm



c) Dùng 3 điểm

Hình 5.28. Phép cầu phương Gauss với các sơ đồ có số điểm Gauss khác nhau.

Để thấy rằng kết quả trên là chính xác nếu đường cong $f(r)$ là thẳng hay hàm $f(r)$ là bậc nhất. Trong trường hợp tổng quát, phép cầu phương Gauss với bài toán 1 chiều là:

$$\star \quad I = \int_{-1}^1 f(r) dx = \sum_{i=1}^n w_i f_i = \sum_{i=1}^n w_i f(r_i) \quad (5.92)$$

trong đó n là số điểm Gauss sử dụng trong phép cầu phương
 r_i là tọa độ của điểm Gauss thứ i

w_i là trọng số ứng với điểm Gauss thứ i

Hình 5.28 giới thiệu phép cầu phương Gauss với sơ đồ 1, 2 hoặc 3 điểm Gauss. Trong phép cầu phương Gauss, vị trí các điểm Gauss được xác định sao cho với một số điểm n đã cho thì đạt được độ chính xác lớn nhất. Các điểm Gauss được đặt đối xứng với tâm của khoảng tích phân. Các trọng số là như nhau với các điểm Gauss đối xứng nhau. Bảng 5.1 cho biết vị trí và các trọng số tương ứng các điểm Gauss theo các sơ đồ có số điểm Gauss (số n) khác nhau. Chú ý rằng phép cầu phương Gauss với n điểm Gauss sẽ cho kết quả là chính xác đối với nếu hàm $f(r)$ là một đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng $(2n - 1)$. Cũng cần phải dùng tất cả các số lẻ nếu muốn có kết quả chính xác.

Số điểm Gauss (n)	Tọa độ điểm Gauss theo một phương (r hoặc s) r_i hoặc s_i)	Trọng số (w_i)
1	$r_1 = 0,00000 \ 00000 \ 00000$	$2,00000 \ 00000 \ 00000$
2	$r_1, r_2 = \pm \ 0,57735 \ 02691 \ 89626$	$1,00000 \ 00000 \ 00000$
3	$r_1, r_3 = \pm \ 0,77459 \ 66692 \ 41483$ $r_2 = 0,00000 \ 00000 \ 00000$	$0,55555 \ 55555 \ 55555$ $0,88888 \ 88888 \ 88889$

4	$r_1, r_4 = \pm 0,86113\ 63115\ 94053$ $r_2, r_3 = \pm 0,33998\ 10435\ 84856$	$0,34785\ 48451\ 47454$ $0,65214\ 51548\ 62546$
5	$r_1, r_5 = \pm 0,90617\ 98459\ 38664$ $r_2, r_4 = \pm 0,53846\ 93101\ 05683$ $r_3 = 0,00000\ 00000\ 00000$	$0,23692\ 68850\ 56189$ $0,47862\ 86704\ 99366$ $0,56888\ 88888\ 88889$
6	$r_1, r_6 = \pm 0,93246\ 95142\ 03152$ $r_2, r_5 = \pm 0,66120\ 93864\ 66265$ $r_3, r_4 = \pm 0,23861\ 91860\ 83197$	$0,17132\ 44923\ 79170$ $0,36076\ 15730\ 48139$ $0,46791\ 39345\ 72691$

Bảng 5.1. Tọa độ (r_i hoặc s_i) và trọng số (w_i) trong phép cầu phương Gauss

Thí dụ, nếu dùng sơ đồ 3 điểm Gauss ($n = 3$) thì tích phân (5.91) sẽ là

$$I = \sum_{i=1}^3 w_i f(r_i) = 0,55556 \cdot f(r_1) + 0,88889 \cdot f(r_2) + 0,55556 \cdot f(r_3)$$

Với $r_1, r_3 = \pm 0,77459$; $r_2 = 0$

Kết quả này là chính xác đối với các hàm $f(r)$ có bậc nhỏ hơn hay bằng 5.

Để hiểu hơn về phép cầu phương Gauss có thể xét minh họa việc tính tích phân một hàm đơn giản sau đây. Cho

$$f(r) = a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + a_4 r^3$$

$$\text{Để thấy: } I = \int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_1 + \frac{2}{3} a_3$$

Nếu dùng phép cầu phương Gauss với sơ đồ 2 điểm Gauss để tính tích phân này, thì theo (5.92)

$$I_G = \sum_{i=1}^2 w_i f(r_i) = w \cdot f(-r_1) + w f(r_1) = 2 w (a_1 + a_3 r_1^2)$$

Gọi $e = I - I_G$ là sai số của phép cầu phương Gauss, thì

$$e = I - I_G = 2 a_1 (1 - w) + 2 a_3 \left(\frac{1}{3} - w r_1^2 \right)$$

Để sai số này là nhỏ nhất với các giá trị tùy ý của a_1 và a_3 thì cần có

$$\frac{\partial e}{\partial a_1} = \frac{\partial e}{\partial a_3} = 0.$$

Các điều kiện này cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 - w = 0 \\ \frac{1}{3} - w r_i^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = 1 \\ r_i = \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0,557735 \ 02691 \ 89626 \end{cases}$$

Trong bài toán hai chiều, miền lấy tích phân là hình vuông, thì công thức tích phân Gauss nhận được bằng cách lần lượt thực hiện tích phân Gauss theo từng phương r, s như sau.

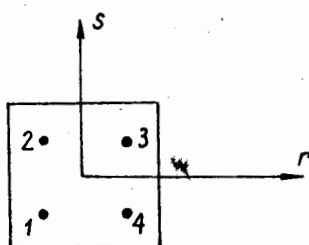
$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds = \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^n w_i f(r_i, s) \right] ds = \sum_{j=1}^n w_j \left[\sum_{i=1}^n w_i f(r_i, s_j) \right]$$

$$\text{Hay: } I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(r_i, s_j) \quad (5.93)$$

trong đó (r_i, s_i) là tọa độ của điểm Gauss i

w_i là trọng số tương ứng.

Thí dụ với tích phân Gauss bốn điểm (hình 5.29)



Hình 5.29.

$$I = (1,00000) \times (1,00000) [f(r_1, s_1) + f(r_2, s_2) + f(r_3, s_3) + f(r_4, s_4)]$$

Ở đây các điểm Gauss có tọa độ $r_i, s_i = \pm 0,557735$

Với phần tử ba chiều có dạng khối hộp, cũng suy luận tương tự trên tích phân Gauss là

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s,t) dr ds dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_j w_k f(r_i, s_i, t_i) \quad (5.94)$$

Với phần tử tam giác có biên thẳng thì sử dụng công thức ở bài 5.1 tính tích phân theo các tọa độ diện tích.

Với phần tử đẳng tham số, thì dùng công thức sau:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-r} f(r,s) dr ds = \sum_{i=1}^n w_i f_i(r_i, s_i) \quad (5.95)$$

trong đó (r_i, s_i) là tọa độ điểm Gauss thứ i (Bảng 5.2)

w_i là trọng số tương ứng điểm Gauss thứ i

r_i số các điểm Gauss trên phần tử chuẩn

Bảng 5.2. Các điểm Gauss và trọng số cho phần tử tam giác

Số điểm Gauss (n)	(r_i, s_i)	w_i
1	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{2}$
3	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$	$\frac{1}{6}$

Chương 6

Tấm chịu uốn

§6.1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA TẤM CHỊU UỐN.

Tấm là một kết cấu được giới hạn bởi hai mặt phẳng song song và cách nhau một khoảng là t (gọi là chiều dày tấm). Mặt trung gian là mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng tấm. Tùy theo tỷ số giữa bề dày tấm và kích thước nhỏ nhất của mặt phẳng tấm $\left(\frac{t}{b}\right)$ mà người ta có thể chia tấm thành hai loại sau.

Tấm dày: $\frac{t}{b} > \frac{1}{5}$

Tấm mỏng: Khi $\frac{1}{20} \leq \frac{t}{b} \leq \frac{1}{5}$

và độ võng lớn nhất $w_{\max} \leq \frac{t}{4}$ 9

Trong tấm mỏng, các ứng suất màng là rất nhỏ so với các ứng suất gây ra bởi sự uốn tấm do tải trọng vuông góc tấm gây ra khi tấm có độ võng nhỏ.

Tuy nhiên nếu tấm mỏng có độ võng lớn $\left(w_{\max} > \frac{t}{4}\right)$ các ứng suất do uốn này bị ảnh hưởng rất nhiều bởi các ứng suất màng. Khi đó phải tính toán với lý thuyết tấm có biến dạng lớn.

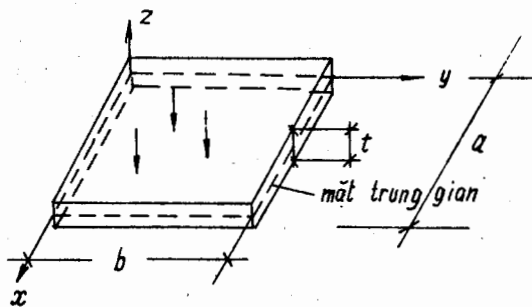
Giáo trình này trình bày việc tính toán tấm mỏng theo cả hai lý thuyết: lý thuyết tấm cổ điển (hay cũng còn gọi là lý thuyết Kirchhoff) và lý thuyết Mindlin có kể đến cả biến dạng trượt trong tấm. Trong bài tiếp sau chúng ta cũng sẽ đưa ra các phương trình cơ bản trong bài toán tấm dạng tam giác và dạng chữ nhật trên cơ sở hai lý thuyết này ngõ hầu qua đó thấy được cách phân tích bài toán theo phương pháp PTHH.

1. Lý thuyết cổ điển của Kirchhoff :

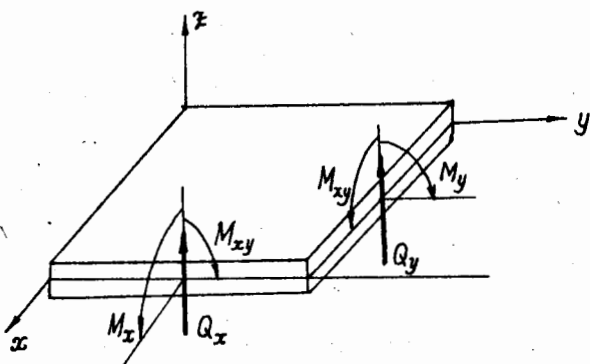
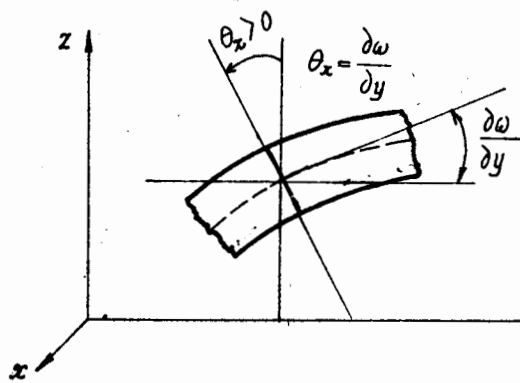
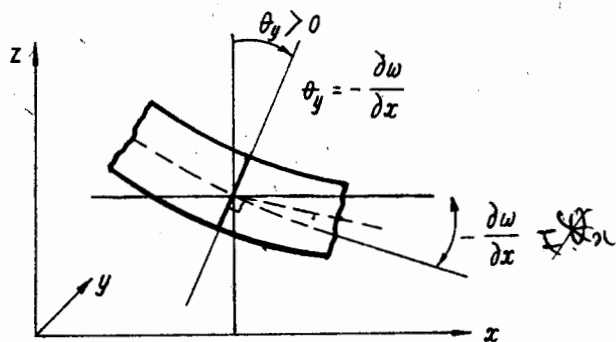
Lý thuyết Kirchhoff dựa trên cơ sở các giả thiết sau

1. Các đoạn thẳng vuông góc với mặt trung gian của tấm vẫn còn thẳng và vuông góc với mặt trung bình khi chịu uốn và độ dài của chúng là không đổi.
2. Khi tấm bị uốn, mặt trung bình không bị kéo nén hay trượt. Nó là mặt trung hòa.
3. Bỏ qua ứng suất pháp vuông góc mặt phẳng tấm.

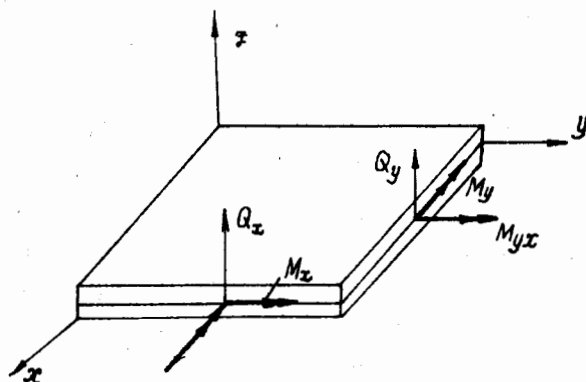
Xét tấm chịu uốn bởi các lực vuông góc mặt phẳng tấm với hệ trục tọa độ xyz sao cho mặt phẳng tọa độ xy trùng với mặt trung gian tấm và trục z là vuông góc với mặt phẳng tấm (hình 6.1). Trên cơ sở các giả thiết trên, các thành phần chuyển vị u và v của tấm được biểu diễn theo độ võng u và các góc xoay θ_x, θ_y của mặt trung gian hay mặt trung hòa của tấm (hình 6.2) như sau.



Hình 6.1. Tấm chịu uốn và hệ trục tọa độ xyz.



Hình 6.2. Quan hệ giữa các góc xoay của mặt trung hòa và đạo hàm độ võng $w(x,y)$



Hình 6.3. Các thành phần nội lực.

$$\begin{aligned} v &= -z \theta_x = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u &= z \theta_y = -z \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ở đây: $w = w(x, y)$ là hàm độ võng tức chuyển vị theo phương z của mặt trung hòa.

Các thành phần biến dạng của một điểm bất kỳ thuộc tấm:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z k_x \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z k_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = z k_{xy} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Trong đó: k_x , k_y và k_{xy} lần lượt là độ cong theo phương x , phương y và hai lần độ xoắn. Và

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6.3)$$

Còn các biến dạng góc $\gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$ có thể thấy được ngay từ giả thiết thứ nhất của Kirchhoff.

Để tìm ứng suất, ta sử dụng định luật Hooke (dạng ngược) đã trình bày ở chương 1 với chú ý rằng $\sigma_z = 0$ (do giả thiết 3 của Kirchhoff). Sử dụng (6.3), dễ dàng nhận được:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Và các nội lực (là “hợp lực” của ứng suất) tương ứng:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \, dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \, dz \quad \text{và} \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz \quad (6.5)$$

dễ dàng biểu diễn theo hàm độ võng $w(x, y)$ hay các độ cong, bởi từ (6.4) thấy rõ luật phân bố tuyến tính theo chiều dày tấm của các ứng suất này.

Và ở dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [D]_t \{k\} \quad (6.6)$$

trong đó: D là độ cứng của tấm chịu uốn, $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ (6.7)

$[D]_t$: Ma trận các hệ số đàn hồi của tấm chịu uốn

$$[D]_t = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \{k\} &= \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \\ &= \{k_x \quad k_y \quad k_{xy}\}^T \text{ là vectơ độ cong tấm chịu uốn} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ngoài ra từ điều kiện cân bằng, các thành phần ứng suất τ_{xz} , τ_{yz} và các thành phần nội lực tương ứng hợp lực của chúng là Q_x , Q_y mà

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz$$

cũng xác định được từ hàm độ võng $w(x,y)$ như sau:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (6.10)$$

Ở đây: $\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

Hơn nữa hàm độ võng $w(x,y)$ của mặt trung bình của tấm được xác định từ phương trình vi phân chủ đạo sau và các điều kiện biên ở các cạnh biên tấm.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \quad (6.11)$$

Đây cũng chính là phương trình cân bằng được biểu diễn qua chuyển vị. Sau khi tìm được hàm độ võng $w(x,y)$ thì rõ ràng ta có thể tìm được nội lực, ứng suất, biến dạng, ... của tấm.

Như vậy có thể thấy rằng trong lý thuyết Kirchhoff, khi bỏ qua biến dạng trượt ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$), trạng thái ứng suất và biến dạng của tấm hoàn toàn được biểu diễn qua hàm độ võng $w(x,y)$ của mặt trung gian của tấm. Vậy, theo phương pháp phần tử hữu hạn, nếu hàm chuyển vị được xấp xỉ hóa và cần tìm là hàm độ võng w thì đòi hỏi xấp xỉ của nó không chỉ là liên tục mà còn đảm bảo tính liên tục của các đạo hàm của nó giữa các phần tử. Ngoài ra theo các yêu cầu hội tụ đã nói ở chương 2, đa thức xấp xỉ của hàm độ võng w phải có khả năng mô tả các trạng thái biến dạng không đổi trong phần tử. Điều này có nghĩa là hàm xấp xỉ phải chứa trạng

thái biến dạng mà có độ cong không đổi, tức bảo đảm $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ và $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ là hằng

số (theo (6.2)). Và tất nhiên, đa thức xấp xỉ cũng phải bảo đảm tính đẳng hướng hình học. Điều này rõ ràng làm việc chọn hàm xấp xỉ thỏa mãn tất cả các yêu cầu trên lại càng phức tạp hơn. Để đơn giản chúng ta chỉ cần bảo đảm sự liên tục của chuyển vị và góc xoay tại các nút góc và theo phương pháp tuyến của các cạnh biên. Những phần tử được xây dựng với các hàm xấp xỉ thỏa mãn các điều kiện này được gọi là các phần tử tương thích (compatible hay conformal). Tuy nhiên việc tìm ma trận độ cứng với các phần tử tương thích là rất phức tạp. Do đó người ta thường sử dụng một loại phần tử tấm chỉ đòi hỏi sự liên tục của chuyển vị và góc xoay tại

các nút góc. Khi đó các bậc tự do của mỗi nút sẽ là giá trị của w của $\frac{\partial w}{\partial x}$ và $\frac{\partial w}{\partial y}$ tại

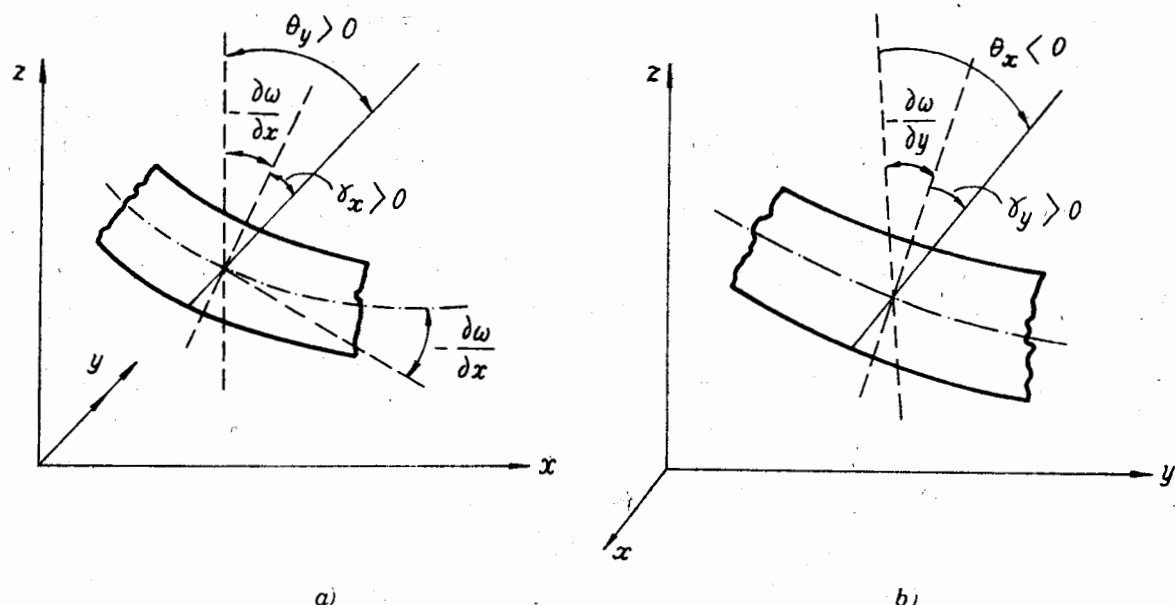
nút đó. Phần tử loại này được gọi là phần tử không tương thích (incompatible hay non-conformal). Và thực tế cho thấy các phần tử không tương thích vẫn cho kết quả tốt và thường được sử dụng để tính toán tấm chịu uốn. Ở bài sau chúng ta sẽ xét cụ thể cho phần tử tấm không tương thích dạng tam giác như một thí dụ cụ thể về các bước phân tích, xây dựng ma trận độ cứng phần tử tấm.

Như vậy có thể thấy rằng các bước phân tích và xây dựng cho các phần tử tấm dựa trên cơ sở lý thuyết Kirchhoff vừa dẫn đến việc phải sử dụng các phần tử không tương thích vừa kéo theo các thủ tục phức tạp trong phân tích và lập trình. Trong thời gian gần đây người ta đã xây dựng các phần tử tấm chịu uốn đẳng tham số đơn giản và hiệu quả với việc sử dụng các đại lượng cần tìm chỉ đòi hỏi liên tục về giá trị. Các phần tử này được phát triển trên cơ sở lý thuyết của Mindlin là lý thuyết có kể tới biến dạng trượt trong tấm.

2. Lý thuyết tấm có kể tới biến dạng trượt của Mindlin hay Reissner - Mindlin.

Các giả thiết của lý thuyết Mindlin như sau:

1. Các đoạn thẳng vuông góc với mặt trung gian của tấm trước biến dạng sẽ vẫn là thẳng nhưng không nhất thiết là vuông góc với mặt phẳng trung hòa khi biến dạng.
2. Độ võng của tấm là nhỏ, mặt trung gian không bị kéo nén và là mặt trung hòa của tấm khi biến dạng.
3. Bỏ qua ứng suất pháp σ_z



Hình 6.4). Góc xoay của các pháp tuyến xung quanh trục y và trục x có kể tới cả biến dạng trượt trung bình.

Như vậy, so với lý thuyết Kirchhoff, sự khác biệt chỉ khác ở giả thiết thứ nhất. Theo mô hình Mindlin, các đoạn thẳng vuông góc mặt trung gian vẫn là thẳng trong quá trình biến dạng nhưng không còn là vuông góc với mặt trung gian nữa, và các góc vuông này bị thay đổi một lượng đúng bằng biến dạng trượt trung bình gây ra bởi lực cắt. Như vậy góc xoay tổng cộng của mặt cắt gồm hai phần, phần thứ nhất do độ võng của tấm khi các pháp tuyến vẫn còn vuông góc với mặt trung bình, phần thứ hai là do biến dạng trượt trung bình gây ra (hình 6.4)

Nếu gọi γ_x là biến dạng trượt trung bình đối với mặt cắt $x = \text{const}$, thì từ hình 6.4b có thể thấy góc xoay θ_y như sau:

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_x \quad (6.12)$$

Cũng tương tự với mặt cắt $y = \text{const}$ (hình 6.4a), ta có

$$-\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_y \quad (6.13)$$

Do đó, các biến dạng trượt trung bình là:

$$\gamma_x = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6.14)$$

$$\gamma_y = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Để thấy là nếu bỏ qua biến dạng trượt thì ta sẽ trở lại ngay các kết quả của lý thuyết Kirchhoff, tức là: $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$, $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$ khi $\gamma_x = \gamma_y = 0$.

Các biến dạng trượt này và các ứng suất tiếp τ_{xz} , τ_{yz} có quan hệ theo định Hooke

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{44} & d_{45} \\ d_{45} & d_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \quad (6.15a)$$

Với vật liệu đẳng hướng thì sẽ cụ thể là

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \quad (6.15b)$$

Do biến dạng trượt được xem là không đổi trên suốt bề dày tấm, nên hợp lực của các ứng suất tiếp này trên một đơn vị dài mặt cắt, tức các lực cắt Q_x và Q_y , được tính theo các biến dạng trượt là

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \frac{Et\alpha}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

$$\text{Hay } \{Q\} = [D_c] \{\gamma\} \quad (6.17)$$

Ở đây: $\frac{E}{2(1+\nu)} = G$ là môđun đàn hồi trượt

α : là hệ số hiệu chỉnh kể đến sự phân bố bậc 2 theo bề dày của biến dạng trượt. Thường lấy $\alpha = 5/6$

Các độ cong k_x , k_y và độ xoắn k_{xy} được biểu diễn theo các góc xoay θ_x và θ_y như sau

$$k_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad k_y = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \quad k_{xy} = \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (6.18)$$

Vậy, theo (6.6) và (6.17), các nội lực $\{M\}$ và $\{Q\}$ được biểu diễn theo độ cong $\{k\}$ và biến dạng trượt $\{\gamma\}$ như sau:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \hline Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t^3}{12} & d_{11} & d_{12} & 0 \\ & d_{21} & d_{22} & 0 \\ & 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} d_{44} & d_{45} \\ d_{54} & d_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

Với tấm đẳng hướng, thì cụ thể ta có:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \hline Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} + \frac{Et}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

Hay ở dạng gọn hơn:

$$\left\{ \begin{array}{c} \{M\} \\ \{Q\} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} [D_u] & [0] \\ [0]^T & [D_c] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{k\} \\ \{\gamma\} \end{array} \right\} \quad (6.21)$$

Quan hệ này có thể so sánh với $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$ dùng cho quan hệ giữa ứng suất biến dạng. Và như vậy, trong bài toán tấm chịu uốn, các nội lực và các độ cong, cùng với các biến dạng trượt tương ứng có thể được xem tương tự như ứng suất và biến dạng. Do đó để thuận tiện chúng ta có thể biểu diễn (6.21) như sau:

$$\{\sigma\}_t = [D]_t \{\epsilon\}_t \quad (6.22)$$

trong đó:

$$\{\sigma\}_t = \left\{ \begin{array}{c} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{array} \right\}, \quad [D]_t = \left[\begin{array}{cc} [D_u] & [0] \\ [0]^T & [D_c] \end{array} \right], \quad \{\epsilon\}_t = \left\{ \begin{array}{c} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{array} \right\} \quad (6.23)$$

(5 × 5)

Sử dụng (6.18) và (6.14) ta có thể biểu diễn vector độ cong và biến dạng trượt $\{\epsilon\}_t$ theo ba chuyển vị w , θ_x và θ_y như sau:

$$\{\epsilon\}_t = \left\{ \begin{array}{c} \partial\theta_y/\partial x \\ -\partial\theta_x/\partial y \\ \partial\theta_y/\partial y - \partial\theta_x/\partial x \\ \theta_y + \partial w/\partial x \\ -\theta_x + \partial w/\partial y \end{array} \right\} \quad (6.24)$$

Thế năng biến dạng của tấm được biểu diễn theo nội lực và các độ cong, cùng biến dạng trượt tương ứng là:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left(\{M\}^T \{k\} + \{Q\}^T \{\gamma\} \right) dA \quad (6.25)$$

Số hạng thứ hai trong (6.25) tương ứng với phần thế năng biến dạng do biến dạng trượt gây ra. Thay (6.6) và (6.17) vào (6.25) ta có:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left(\{k\}^T [D_u] \{k\} + \{\gamma\}^T [D_c] \{\gamma\} \right) dA \quad (6.26)$$

Sử dụng cách biểu diễn (6.23)

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\epsilon\}_t^T [D]_t \{\epsilon\}_t dA$$

và biểu thức của thế năng toàn phần của tấm chịu uốn bởi tải trọng ngang $p(x,y)$ vuông góc bề mặt tấm được cho như sau:

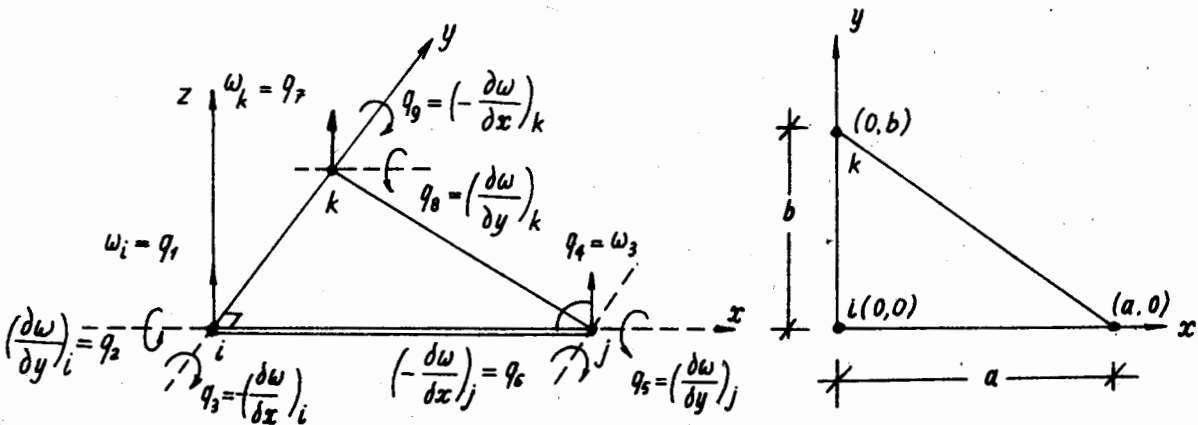
$$\pi = \frac{1}{2} \int_A \{\epsilon\}_t^T [D]_t \{\epsilon\}_t dA - \int_A w p dA \quad (6.27)$$

trong đó số hạng thứ hai là công của ngoại lực $p(x,y)$

§6.2. PHẦN TỬ TAM KHÔNG TƯƠNG THÍCH DẠNG TAM GIÁC

Như đã nói ở trên, trong bài này chúng ta sẽ xét cụ thể phần tử tam dạng tam giác theo lý thuyết Kirchhoff như một minh họa cho những phân tích và dẫn dắt việc tính toán tấm mỏng không kể tới biến dạng trượt theo phương pháp PTHH.

Xét một phần tử tam mỏng dạng tam giác chịu uốn cùng hệ trục địa phương xyz như hình 6.5.



Hình 6.5. Phần tử tam dạng tam giác chịu uốn cùng các bậc tự do của nó.

Tại mỗi nút phần tử độ võng w và các góc xoay θ_x, θ_y theo các trục x, y được xem là các bậc tự do của nút. Do bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt (theo lý thuyết Kirchhoff) nên như đã nói ở trên các góc xoay này chính là đạo hàm của hàm độ võng w theo y và x . Cụ thể, các bậc tự do của mỗi nút hay còn gọi là các chuyển vị nút của mỗi nút là

$$w_i; \theta_{xi} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \quad \text{và} \quad \theta_{yi} = \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i$$

Cũng ở mục 1 bài 6.1 chúng ta đã thấy rằng hàm độ võng $w(x,y)$ là đại lượng cần tìm trong bài toán tấm chịu uốn theo lý thuyết Kirchhoff. Vì phần tử tam giác như trên có chín bậc tự do nên hàm độ võng $w(x,y)$ được xấp xỉ hóa bằng một đa thức chứa chín tham số. Để bảo đảm tính đẳng hướng hình học hàm đa thức xấp xỉ của độ võng có dạng như sau:

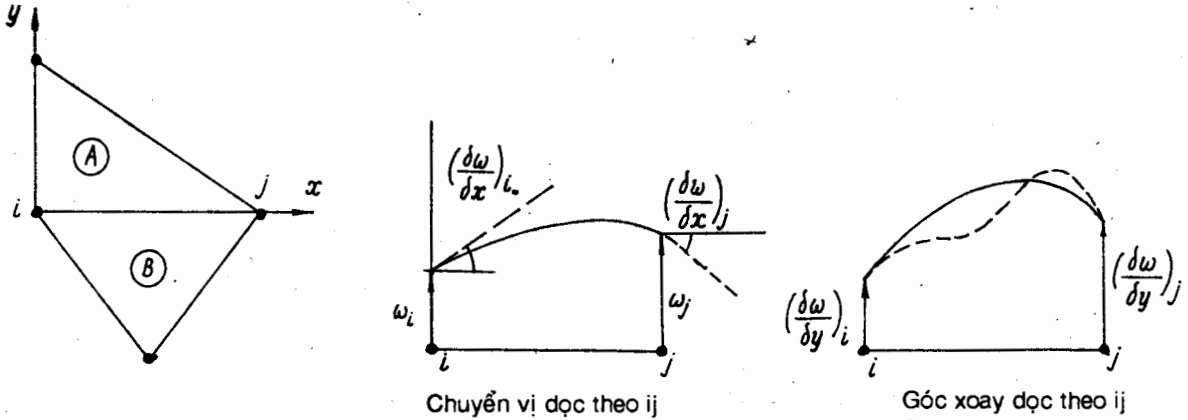
$$w(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 (x^2 y + xy^2) + a_9 y^3 \quad (6.28)$$

Đến đây ta thử xét tính tương thích của phần tử đang xét với hàm độ võng được cho bởi (6.28). Điều này có nghĩa là cần xem rằng chuyển vị và các đạo hàm

của nó trên các cạnh (mặt) biên có xác định một cách duy nhất theo các chuyển vị nút (bậc tự do) không.

Xét cạnh biên ij là cạnh biên chung giữa hai phần tử A và B kề sát nhau (hình 6.6). Trong hệ tọa độ địa phương cạnh ij có phương trình $y = 0$. Chuyển vị theo phương z hay độ võng dọc theo cạnh này là:

$$w_{ij} = (w)_{y=0} = a_1 + a_2 x + a_4 x^2 + a_7 x^3 \quad (6.29)$$



Hình 6.6. Tính tương thích dọc cạnh biên chung giữa hai phần tử.

Độ dốc theo phương x hay $\frac{\partial w}{\partial x}$ dọc theo cạnh này là

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{ij} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y=0} = a_2 + 2a_4 x + 3a_7 x^2 \quad (6.30)$$

Vì nút i và nút j là chung của cả hai phần tử A và B nên các bậc tự do hay các chuyển vị nút của hai nút này cũng là chung đối với hai phần tử có chung cạnh biên ij này. Tuy nhiên nếu để ý đến bốn chuyển vị nút w_i , $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i$, w_j và

$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_j$, ta có thể thấy rằng bằng phép đồng nhất bốn bậc tự do này với giá trị của

hàm w và giá trị đạo hàm $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ tại hai điểm nút i ($x = 0$) và j ($x = a$), tức chúng

ta có bốn điều kiện sau

$$\left\{ \begin{array}{l} w_i = w_{ij}(\text{tại } x = 0) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{ij} \quad (\text{tại } x = 0) \\ w_j = w_{ij}(\text{tại } x = a) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_j = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{ij} \quad (\text{tại } x = a) \end{array} \right.$$

thì chúng ta hoàn toàn có thể xác định được bốn tham số a_1, a_2, a_4 và a_7 một cách duy nhất theo bốn bậc tự do trên. Do đó w và $\frac{\partial w}{\partial x}$ hoàn toàn xác định trên cạnh biên ij và tính liên tục của chuyển vị và độ dốc $\frac{\partial w}{\partial x}$ dọc theo cạnh này được bảo đảm khi chuyển từ phần tử A sang B.

Tuy nhiên kết luận này là không đúng đối với độ dốc theo phương y , tức $\frac{\partial w}{\partial y}$, dọc theo cạnh biên chung ij . Thật vậy, trên cạnh biên ij ($y = 0$), có

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{ij} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = a_3 + a_5 x + a_8 x^2 \quad (6.31)$$

Và có thể thấy rằng để xác định $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{ij}$ dọc theo cạnh biên ij , ta cần xác định được ba tham số a_3, a_5 và a_8 . Nhưng chúng ta chỉ có thể có được hai phương trình từ việc thay thế vào (6.31) hai điều kiện dưới đây

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{ij} \quad (\text{tại } x = 0)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_j = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{ij} \quad (\text{tại } x = a)$$

Do đó độ dốc vuông góc với biên ij là không xác định (hình 6.6b). Độ dốc $\frac{\partial w}{\partial y}$ này tại các nút i và j là như nhau đối với cả hai phần tử, nhưng có thể là khác nhau tại các điểm khác dọc theo cạnh biên chung ij . Do vậy phần tử này là không tương thích.

Tuy nhiên, phần tử này vẫn cho kết quả tốt và được sử dụng rộng rãi trong thực tế.

Quay trở lại với hàm xấp xỉ của độ võng, ta thấy rằng hàm độ võng (6.28) ở dạng ma trận quen thuộc là:

$$w(x,y) = [P(x,y)] \{a\} \quad (6.32)$$

trong đó ma trận các đơn thức $[P(x,y)]$ là:

$$[P(x,y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & (x^2y + xy^2) & y^3 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

và vectơ các tham số $\{a\}$ có chín thành phần:

$$\{a\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_9\}^T$$

Vectơ các bậc tự do của phần tử, hay vectơ các chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ cũng gồm chín thành phần (hình 6.5)

$$\{q\}_e = \left\{ w_i \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i w_j \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_j \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_j w_k \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_k \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_k \right\}^T \quad (6.34)$$

Các tham số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ được xác định từ việc thực hiện đồng nhất các bậc tự do của phần tử với giá trị của các hàm w , $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$ và $\left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)$ tại các nút i , j và k có tọa độ $(0, 0)$, $(a, 0)$ và (a, b) trong hệ tọa độ địa phương như hình 6.5.

$$q_1 = w_i = w(0, 0), \quad q_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i = \frac{\partial w}{\partial y}(0, 0), \quad q_3 = \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i = -\frac{\partial w}{\partial x}(0, 0)$$

$$q_4 = w_j = w(a, 0), \quad q_5 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_j = \frac{\partial w}{\partial y}(a, 0), \quad q_6 = \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_j = -\frac{\partial w}{\partial x}(a, 0)$$

$$q_7 = w_k = w(0, b), \quad q_8 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_k = \frac{\partial w}{\partial y}(0, b), \quad q_9 = \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_k = -\frac{\partial w}{\partial x}(0, b)$$

Hay ở dạng ma trận:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_9 \end{Bmatrix} = [A] \{a\} \quad (6.35)$$

trong đó ma trận $[A]$ là:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & -3b^2 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Nghịch đảo của [A] là:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{2}{a} & 0 & \frac{3}{a^2} & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{bc} & \frac{b}{ac} & 0 & 0 & -\frac{b}{ac} & 0 & -\frac{a}{bc} & 0 \\ -\frac{3}{b^2} & 0 & \frac{2}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{b^2} & 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{2}{a^3} & \frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{2}{a^3} & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{bc} & -\frac{1}{ac} & 0 & 0 & \frac{1}{ac} & 0 & \frac{1}{bc} & 0 \\ \frac{2}{b^3} & 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{b^3} & 0 & -\frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

trong đó: $c = b - a$

Vậy như đã trình bày ở chương 2, hàm độ võng có thể được biểu diễn như tổ hợp tuyến tính của các hàm dạng, tức là:

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^9 N_i q_i = [N] \{q\}_e \quad (6.38)$$

trong đó ma trận các hàm dạng [N], theo như chương 2 đã trình bày:

$$[N] = [P(x,y)] [A]^{-1} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_9 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

với các hàm dạng N_i là như sau:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3}{a^2} x^2 - \frac{3}{b^2} y^2 + \frac{2}{a^3} x^3 + \frac{2}{b^3} y^3 \\ N_2 &= x - \frac{2}{a} x^2 + \frac{a}{bc} xy + \frac{1}{a^2} x^3 - \frac{1}{bc} x^2 y - \frac{1}{bc} xy^2 \\ N_3 &= -y + \frac{b}{ac} xy + \frac{2}{b} y^2 - \frac{1}{ac} x^2 y - \frac{1}{ac} xy^2 - \frac{1}{b^2} y^3 \\ N_4 &= \frac{3}{a^2} x^2 - \frac{2}{a^3} x^3 \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$N_5 = -\frac{1}{a}x^2 + \frac{1}{a^2}x^3$$

$$N_6 = -\frac{b}{ac}xy + \frac{1}{ac}x^2y + \frac{1}{ac}xy^2$$

$$N_7 = \frac{3}{b^2}y^2 - \frac{2}{b^3}y^3$$

$$N_8 = -\frac{a}{bc}xy + \frac{1}{bc}x^2y + \frac{1}{bc}xy^2$$

$$N_9 = \frac{1}{b}y^2 - \frac{1}{b^2}y^3$$

Các biến dạng trong tấm là ϵ_x , ϵ_y , và γ_{xy} được xác định theo (6.2) ở dạng ma trận là:

$$\{\epsilon\}_e = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.41)$$

$$\text{Vì } w = [N] \{q\}_e = [P(x,y)] [A]^{-1} \{q\}_e$$

Nên biến dạng được biểu diễn theo $\{q\}_e$

$$\{\epsilon\}_e = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} [P(x,y)] [A]^{-1} \{q\}_e = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [P(x,y)] \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [P(x,y)] \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [P(x,y)] \end{Bmatrix} [A]^{-1} \{q\}_e$$

$$\text{Hay gọn lại: } \{\epsilon\}_e = [B] \{q\}_e \quad (6.42)$$

Trong đó ma trận biến dạng $[B]$ là:

$$[B] = -z [\bar{B}] [A]^{-1} \quad (6.43)$$

Ở đây:

$$\overline{[B]} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} [P(x,y)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x + 4y & 0 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

Theo các công thức cơ bản trong chương 2, ma trận độ cứng phần tử tám dạng tam giác ba nút không tương thích trên sẽ là:

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \quad (6.45)$$

Bằng cách thay $[B]$ xác định theo (6.43) vào (6.45), ta có

$$[K]_e = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \int_A ([A]^{-1})^T \overline{[B]}^T [D] \overline{[B]} [A]^{-1} dA \quad (6.46)$$

vì $[A]^{-1}$ chỉ chứa các hằng số nên đưa ra khỏi dấu tích phân, và ta được

$$[K]_e = \frac{t^3}{12} ([A]^{-1})^T \left(\int_A \overline{[B]}^T [D] \overline{[B]} dA \right) [A]^{-1} \quad (6.47)$$

ở đây A là diện tích phần tử. Hay ở dạng gọn hơn:

$$[K]_e = ([A]^{-1})^T [I] [A]^{-1} \quad (6.48)$$

$$\text{trong đó: } [I] = \int_A \overline{[B]}^T [D]_t \overline{[B]} dA \quad (6.49)$$

ở đây $[D]_t$: ma trận các hệ số đàn hồi của tấm chịu uốn và xác định trong (6.8)

$$[D]_t = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \text{ với } D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \text{ là độ cứng trụ của tấm.}$$

Với $\overline{[B]}$ trong (6.44), ta tính sẵn tích các ma trận $\overline{[B]}^T [D]_t \overline{[B]}$ là:

$$\overline{[B]}^T [D]_t \overline{[B]} =$$

$$= D \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 4\nu & 0 & 4 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 12x & 0 & 12x & 36x^2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 4(y+\nu x) & 4(1-\nu)(x+y) & 4(\nu y+x) & 12x(y+\nu x) & 4(x^2+y^2+2xy) + 8(1-\nu)(x+y)^2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 12\nu y & 0 & 12y & 36\nu xy & 12(\nu y^2+xy) & 36y^2 & \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Đối} \\ \text{xúng} \end{matrix}$$

Để tính $[I] = \int_A [\bar{B}]^T [D]_t [\bar{B}] dA$, ta chỉ cần lưu ý rằng:

$$\int_A dA = A = \frac{ab}{2} \text{ (là diện tích tam giác phần tử)}$$

$$\int_A x dA = S_y = \frac{a^2 b}{6} \text{ (như mômen tĩnh của tam giác phần tử với trục y)}$$

$$\int_A x^2 dA = J_y = \frac{a^3 b}{12} \text{ (như mômen quán tính của tam giác phần tử với trục y)}$$

$$\int_A xy dA = J_{xy} = \frac{a^2 b^2}{8} \text{ (như mômen quán tính ly tâm của phần tử với hệ trục xy)}$$

Các tích phân khác cũng suy ra tương tự một cách dễ dàng.

Thực hiện tích phân (6.49), ta xác định được ma trận $[I]$ như sau:

$$[I] = \frac{D}{6} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 12ab & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6(1-\nu)ab & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 12\nu ab & 0 & 12ab & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 12a^2b & 0 & 12a^2b & 18a^3b & & & \\ 0 & 0 & 0 & I_{84} & I_{85} & I_{86} & I_{87} & I_{88} & & \\ 0 & 0 & 0 & 12ab^2 & 0 & 12ab^2 & 27\nu a^2b^2 & 6\nu a^3b + 3a^2b^2 & 18ab^3 & \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Đối} \\ \text{xúng} \end{matrix} \quad (6.50)$$

Ở đây một số thành phần của hàng thứ tám khá phức tạp nên viết riêng ở dưới như sau:

$$I_{84} = 4(ab^2 + \nu a^2 b), \quad I_{85} = 4(1 - \nu)(a^2 b + ab^2), \quad I_{86} = 4(\nu ab^2 + a^2 b)$$

$$I_{87} = 9a^2 b^2 + 6\nu a^3 b, \quad I_{88} = 2[(a^3 b + ab^3)(3 - 2\nu) + a^2 b^2(2 - \nu)]$$

Cuối cùng thực hiện nhân ma trận như (6.48) với $[A]^{-1}$ đã có ở (6.37), ta xác định được ma trận độ cứng của phần tử tam giác ba nút.

$$[K]_e = ([A]^{-1})^T [I] [A]^{-1}$$

Cuối cùng, ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$ được xác định bằng công thức đã biết ở chương 2.

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e \quad (6.51)$$

trong đó $[T]_e$ là ma trận chuyển đổi hệ trục tọa độ.

Nếu hệ trục tọa độ tổng thể $x'y'z'$ có mặt phẳng tọa độ $(x'y')$ là trùng với mặt phẳng (xy) của hệ tọa độ địa phương, tức là trùng với mặt trung gian tấm thì ma trận $[T]_e$ được cho bởi

$$[T]_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_x & m_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_y & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_x & m_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_y & m_y \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

trong đó: (l_x, m_x) và (l_y, m_y) là các cosin chỉ phương của các trục x và y trong mặt phẳng $(x'y')$ với các trục x' và y' .

Vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ do tải trọng phân bố $p(x,y)$ vuông góc mặt phẳng tấm cũng tìm được không khó khăn theo công thức đã có:

$$\{P\}_e = \int_A [N]^T p(x,y) dA \quad (6.53)$$

Trường hợp, tấm chịu tải trọng phân bố đều, $p(x,y) = p$

$$\{P\}_e = p \int_A [N]^T dA$$

Vectơ tải phần tử do nhiệt độ được xác định như sau: Nếu gọi T_0 và ΔT là nhiệt độ trung bình và sự chênh lệch nhiệt độ giữa mặt trên và mặt dưới của tấm, và

xem là sự biến thiên nhiệt độ là tuyến tính theo chiều dày tấm thì nhiệt độ của điểm bất kỳ thuộc phần tử là

$$T(x,y,z) = T_0 + \frac{z}{t} \Delta T$$

Vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ do nhiệt độ gây ra có thể tính theo công thức ở chương 2 là:

$$\{P\}_e = \int_{V_e} [B]^T [D] \{\epsilon\}_0 dV = \int_{V_e} [B]^T [D] \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dV$$

Sử dụng (6.43) ta có:

$$\{P\}_e = -\alpha ([A]^{-1})^T \int_{-t/2}^{t/2} z \left(T_0 + \frac{z}{t} \Delta T \right) dz \cdot \int_A [\bar{B}]^T [D] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dA$$

$$\{P\}_e = -\frac{E \alpha T_0 t^2}{4(1-\nu)} ([A]^{-1}) \int_A \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 6x \\ 2(x+y) \\ 6y \end{Bmatrix} dA$$

Thực hiện tích phân, ta được

$$\{P\}_e = -\frac{E \alpha T_0 A t^2}{2(1-\nu)} ([A]^{-1})^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ a \\ (a+b)/3 \\ b \end{Bmatrix} \quad (6.54)$$

Cuối cùng, vectơ tải phần tử trong hệ tọa độ tổng thể là

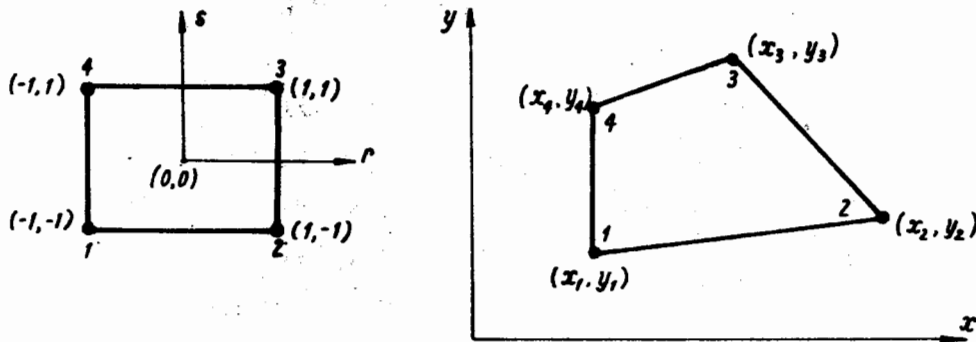
$$\{P'\}_e = [T]_e^T \{P\}_e \quad (6.55)$$

trong đó $[T]_e^T$ xác định bởi (6.52)

§6.3. PHẦN TỬ ĐẲNG THAM SỐ DẠNG TỨ GIÁC BỐN NÚT.

Trong phần 2 bài 6.1 chúng ta đã biết các công thức cơ bản của lý thuyết tấm Mindlin. Qua đó có thể thấy rằng trong đó có ba đại lượng chuyển vị độc lập là độ võng w , các góc xoay θ_x và θ_y đã được đồng thời xét tới để kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt trong tấm chịu uốn. Do đó, khi thiết lập phương trình phần tử hữu hạn, ba hàm dạng được chọn để biểu diễn ba đại lượng độc lập w , θ_x và θ_y đều thuộc loại các hàm nội suy Lagrange. Và phần tử thuộc loại đẳng tham số.

Xét phần tử đẳng tham số dạng tứ giác bốn nút như hình 6.7.



Hình 6.7. Phần tử đẳng tham số dạng tứ giác 4 nút.

Như đã biết ở chương 5, vì phần tử là đẳng tham số nên dạng hình học của phần tử và cả các đại lượng cần tìm là chuyển vị w , các góc xoay θ_x và θ_y đều được biểu diễn bởi các tổ hợp tuyến tính của bốn hàm nội suy song tuyến tính đã trình bày trong bài 5.6. Cụ thể, dạng hình học của phần tử khảo sát được cho bởi các tổ hợp tuyến tính

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (6.56)$$

với (x_i, y_i) là tọa độ của nút i ($i = 1, 2, 3, 4$) trong hệ tọa độ tổng thể (x, y) .

Còn các đại lượng chuyển vị độc lập của phần tử được nội suy theo các chuyển vị nút tương ứng như sau:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^4 N_i w_i \\ \theta_x &= \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} \\ \theta_y &= \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} \end{aligned} \quad (6.57)$$

ở đây w_i , θ_{xi} và θ_{yi} là giá trị của các hàm w , θ_x và θ_y tại nút i . Hay cũng là các bậc tự do của nút i .

Ngoài ra, các hàm dạng N_i trong (6.56) và (6.57) đã được biết trong bài 5.6 và là các hàm theo tọa độ tự nhiên r, s như sau:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + rr_i) (1 + ss_i) \quad (6.58)$$

với (r_i, s_i) là tọa độ của nút i trong hệ tọa độ tự nhiên địa phương (r, s)

Vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ gồm 12 thành phần:

$$\{q\}_e = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \dots \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}\}^T \quad (6.59)$$

Ma trận Jacobi của phép biến đổi tọa độ được cho trong dạng

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Quan hệ giữa các đạo hàm của các hàm N_i theo r và s $\left(\frac{\partial N_i}{\partial r}, \frac{\partial N_i}{\partial s} \right)$ với các đạo hàm theo x và y $\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)$ là:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

Các thành phần của vectơ các độ cong và biến dạng trượt $\{\epsilon\}_t$ được cho bởi (6.24) lúc này được biểu diễn qua các thành phần của vectơ chuyển vị nút phần tử như sau:

$$k_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{yi}$$

$$k_y = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 -\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{xi}$$

$$k_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{yi} - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{xi}$$

$$\gamma_x = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i$$

$$\gamma_y = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 -N_i \theta_{xi} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i$$

Hay ở dạng ma trận:

$$\{\varepsilon\}_t = [B] \{q\}_e \quad (6.62)$$

trong đó: $\{\varepsilon\}_t = \{k_x \quad k_y \quad k_{xy} \quad \gamma_x \quad \gamma_y\}^T$

$$\{q\}_e = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \dots w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}\}^T$$

hay $\{q\}_e = \{\{q_1\}^T \quad \{q_2\}^T \quad \{q_3\}^T \quad \{q_4\}^T\}^T$

với $\{q_i\}$ là các bậc tự do tại nút i và

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (6.63)$$

Còn ma trận biến dạng $[B]$ là

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & [B_3] & [B_4] \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

(5 × 12)

trong đó

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{với } i = 1, 2, 3, 4 \quad (6.65)$$

(5 × 3)

Vậy có thể biểu diễn (6.62) ở dạng khác thuận tiện hơn

$$\{\varepsilon\}_t = [B] \{q\}_e = \sum_{i=1}^4 [B_i] \{q_i\} \quad (6.66)$$

(5 × 1) (5 × 12) (12 × 1) $\sum_{i=1}^4$ (5 × 3)(3 × 1)

Bằng cách thay (6.66) vào (6.22), chúng ta biểu diễn được nội lực (tức vector $\{\sigma\}_t$) theo các chuyển vị nút như sau:

$$\begin{matrix} \{\sigma\}_t \\ (5 \times 1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = [D]_t \{\varepsilon\}_t = [D]_t [B] \{q\}_e = [D]_t \sum_{i=1}^4 [B]_i \{q\}_i \quad (6.67)$$

$(5 \times 5) \quad (5 \times 12) \quad (12 \times 1)$

Hay:

$$\{\sigma\}_t = \sum_{i=1}^4 [D]_t [B]_i \{q\}_i = \sum_{i=1}^4 [D]_t [B]_i \{q\}_i \quad (6.68)$$

$5 \times 1 \quad 5 \times 3 \quad 3 \times 1 \quad 5 \times 3 \quad 3 \times 1$

trong đó các ma trận $[D]_t [B]_i$ có kích thước (5×3) (với $i = 1, 2, 3, 4$) được cho bởi công thức sau:

$$[D]_t [B]_i = [D]_t [B]_i = \frac{Et}{12(1+\nu)} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\nu t^2}{1-\nu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) & \frac{t^2}{1-\nu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \\ 0 & -\frac{t^2}{1-\nu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) & \frac{\nu t^2}{1-\nu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \\ 0 & -\frac{t^2}{2} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right) & \frac{t^2}{2} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \\ 6\alpha \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right) & 0 & 6\alpha N_i \\ 6\alpha \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) & -6\alpha N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

Để thuận tiện cho các tính toán này, bằng cách tách riêng các số hạng liên quan đến uốn và đến biến dạng trượt ra, ta có

$$[D]_t [B]_i = [D]_t [B]_{i,u} + [D]_t [B]_{i,c} \quad (6.70)$$

ở đây:

$$[D B_i]_u = \frac{E t^2}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & -\nu \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} & \lambda \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [D B_i]_c = \frac{E t \alpha}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (6-71)$$

trong đó $\lambda = \frac{1-\nu}{2}$

Có thể gọi $[D B_i]_u$ và $[D B_i]_c$ là các ma trận tính momen và ma trận tính lực cắt do chuyển vị nút i gây ra.

Sử dụng (6.27), thế năng toàn phần của phần tử tấm đang xét là.

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \{\epsilon\}_t^T [D]_t \{\epsilon\}_t dA - \int_{A_e} w p dA$$

Thay $\{\epsilon\}_t$ và w biểu diễn theo các chuyển vị nút $\{q\}_e$ như (6.62) và (6.57) đã cho vào, thế năng toàn phần của phần tử được biểu diễn theo các chuyển vị nút $\{q\}_e$ như sau:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{q\}_e^T \left(\int_{A_e} [B]^T [D]_t [B] dA \right) \{q\}_e - \{q\}_e^T \int_{A_e} [N]^T p dA$$

Hay ở dạng quen thuộc:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{q\}_e^T [K]_e \{q\}_e - \{q\}_e^T \{P\}_e \quad (6.72)$$

trong đó: $[K]_e$ là ma trận cứng phần tử, và $\{P\}_e$ là vectơ tải phần tử

$$[K]_e = \int_{A_e} [B]^T [D]_t [B] dA \quad (6.73)$$

(12 × 12)

$$\{P\}_e = \int_{A_e} [N]^T p dA \quad (6.74)$$

(12 × 1)

ở đây, ma trận $[N]$ chứa các hàm nội suy N_i và có dạng:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

(1 × 12)

Xét tích các ma trận $[k]_e = [B]^T [D]_t [B]$ trong biểu thức tích phân tính $[K]_e$, sử dụng (6.64), và (6.69) ta có:

$$[k]_e = [B]^T [D]_t [B] = \begin{bmatrix} [B_1]^T \\ [B_2]^T \\ [B_3]^T \\ [B_4]^T \end{bmatrix} [D]_t \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & [B_3] & [B_4] \end{bmatrix}$$

trong đó $[B_i]$ được cho trong (6.65)

Thực hiện phép nhân, $[k]_e$ có dạng ma trận khối như sau:

$$[k]_e = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & [k_{13}] & [k_{14}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & [k_{23}] & [k_{24}] \\ [k_{31}] & [k_{32}] & [k_{33}] & [k_{34}] \\ [k_{41}] & [k_{42}] & [k_{43}] & [k_{44}] \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

trong đó các ma trận con $[k_{ij}]$ là:

$$[k_{ij}] = [B_i]^T [D]_t [B_j] = [B_i]^T [D B_j] \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (6.77)$$

(3 × 3) (3 × 5) (5 × 5) (5 × 3) (3 × 5) (5 × 3) j = 1, 2, 3, 4

Hay ở dạng thuận tiện hơn, bằng cách sử dụng (6.70) để biểu diễn ma trận $[k_{ij}]$ thành tổng của hai ma trận riêng biệt liên quan đến độ cứng uốn và độ cứng trượt như sau:

$$[k_{ij}] = [B_i]^T [D B_j] = [B_i]^T ([D B_j]_u + [D B_j]_c) = [k_{ij}]_u + [k_{ij}]_c \quad (6.78)$$

ở đây: $[k_{ij}]_u = [B_i]^T [D B_j]_u$

$$[k_{ij}]_c = [B_i]^T [D B_j]_c \quad (6.79)$$

Sử dụng (6.65) và (6.71) ta nhận được

$$[k_{ij}]_u = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) & -\nu \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) - \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \\ 0 & -\nu \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) - \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

$$[k_{ij}]_c = \frac{Et \alpha}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial y} N_j & \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \\ -N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} & N_i N_j & 0 \\ N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

với $i = 1, 2, 3, 4$

$j = 1, 2, 3, 4$

Dễ thấy rằng: $[k_{ij}] = [k_{ji}]^T$

Vậy, sau khi xác định được

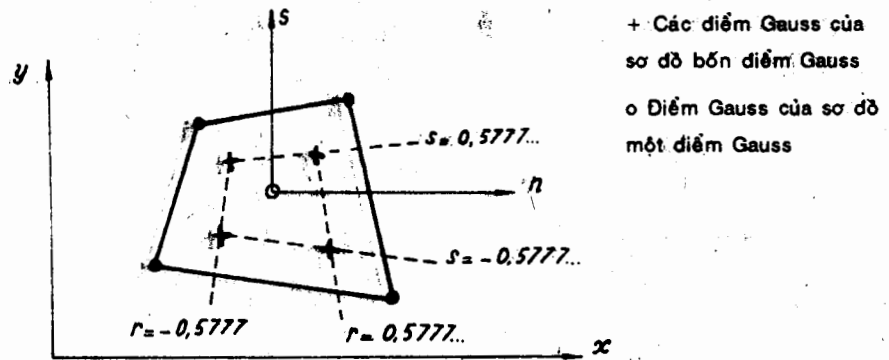
$$[k]_e = [k]_u + [k]_c \quad (6.82)$$

thực hiện tích phân để tìm ma trận cứng phần tử $[K]_e$ theo (6.73)

$$[K]_e = \int_{A_e} [k]_e dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [k]_u |J| dr ds + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [k]_c |J| dr ds \quad (6.83)$$

(12 × 12)

Phép cầu phương Gauss đã trình bày ở chương 5 được dùng để thực hiện tính toán ma trận $[K]_e$. Và theo Hughes, tích phân thứ nhất của (6.83) được tính với sơ đồ bốn điểm Gauss, còn tích phân thứ hai (với $[k]_c$) chỉ với sơ đồ một điểm Gauss (như hình 6.8)



Hình 6.8. Hệ thống và tọa độ các điểm Gauss trong phép cầu phương Gauss với sơ đồ bốn điểm và một điểm

Vectơ tải phần tử được xác định theo (6.74)

$$\{P\}_e = \int_{A_e} [N]^T p dA$$

Trường hợp tải trọng ngang phân bố đều, cường độ $p = \text{const}$

$$\{P\}_e = p \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T |J| dr ds = p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j |J| [N]^T \quad (6.84)$$

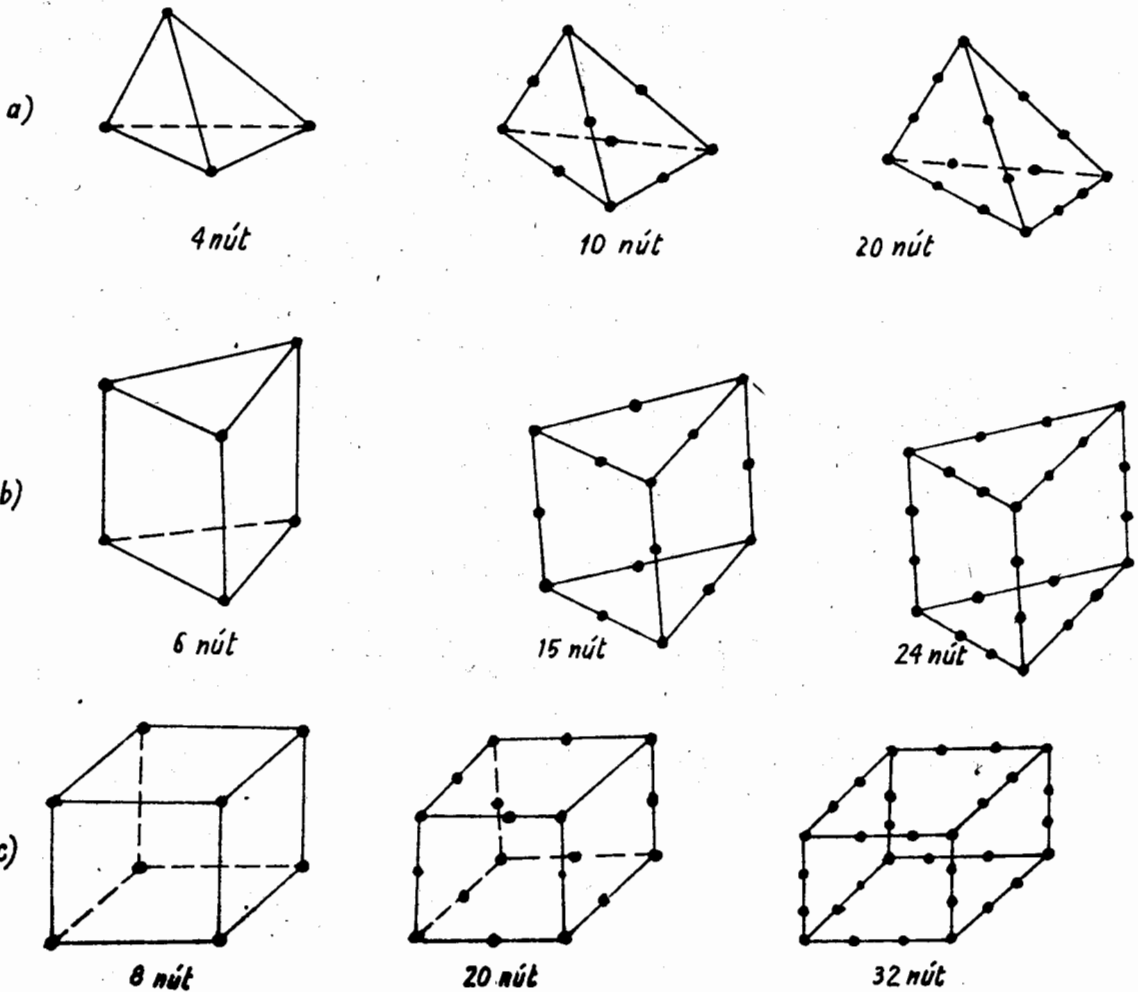
(12 × 1)

và dùng sơ đồ bốn điểm Gauss để tính

Chương 7

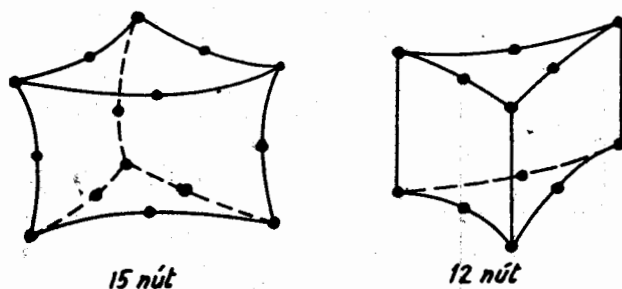
Phần tử ba chiều

Để giải quyết một số bài toán thực tế như đâm dầy ngắn, các bài toán về ống dầy, các mối nối giữa hai hay nhiều ống, các bộ phận máy móc ở trạng thái ứng suất khối, các bài toán về bán không gian đàn hồi chịu lực tập trung, các móng



Hình 7.1. Các phần tử khối ba chiều

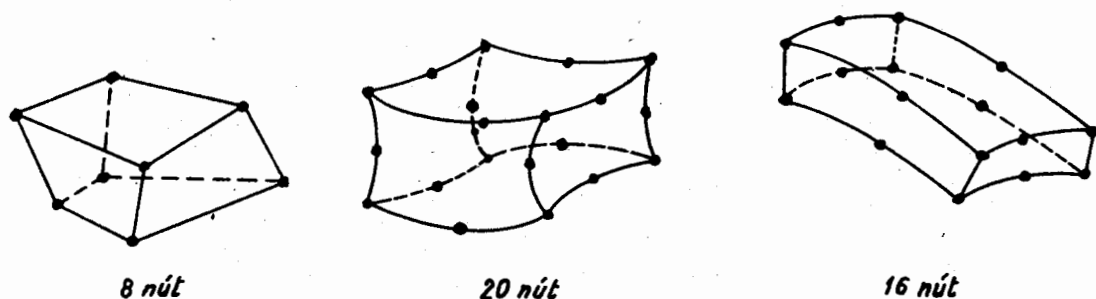
máy,..., chúng ta phải sử dụng các phần tử khối hay còn gọi là phần tử ba chiều. Các phần tử ba chiều có nhiều loại với dạng hình học khác nhau. Hình 7.1 giới thiệu một số phần tử ba chiều như phần tử



Hình 7.2. Các phần tử đẳng tham số dạng khối lăng trụ tam giác.

khối tứ diện bốn nút, mười nút hay hai mươi nút (hình 7.1a), các phần tử khối dạng lăng trụ tam giác sáu nút, 15 nút hay 24 nút (hình 7.1b), các phần tử lục diện 8 nút, 20 nút hay 32 nút.

Các phần tử khối đẳng tham số cũng đã được dùng và rất phong phú. Như ở hình 7.2 giới thiệu phần tử đẳng tham số khối lăng trụ tam giác 15 nút có hai mặt tam giác cạnh cong hay thẳng và ba mặt bên dạng chữ nhật cạnh cong hoặc thẳng. Còn nếu là khối lăng trụ tam giác 12 nút, do không có các nút ở giữa các cạnh bên nên 12 nút này xác định một hình khối có hai mặt dạng tam giác cạnh cong hoặc thẳng nhưng cả ba cạnh bên của khối phải là thẳng (hình 7.2). Tương tự, có thể thấy một vài phần tử đẳng tham số dạng khối lục diện ở hình (7.3).



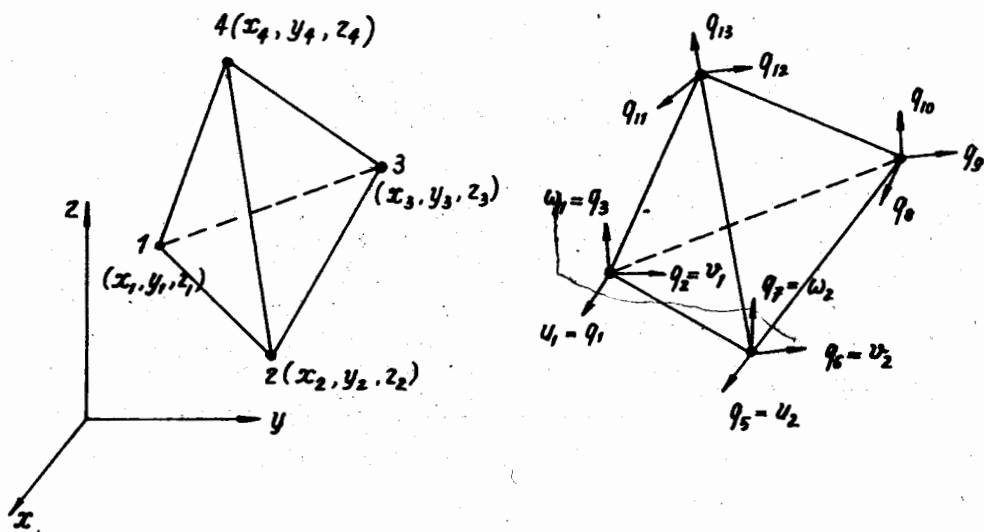
Hình 7.3. Các phần tử đẳng tham số dạng khối lục diện.

Trong chương này, chúng ta sẽ làm quen với phần tử tứ diện bốn điểm nút đơn giản nhất, cũng như với phần tử đẳng tham số dạng khối lục diện tám nút.

§7.1. PHẦN TỬ TỨ DIỆN

Xét phần tử tứ diện bốn nút như hình 7.4 trong hệ tọa độ tổng thể xyz. Với phần tử này để đơn giản ta sẽ phân tích phần tử theo các tọa độ vuông góc tổng thể chứ không cần sử dụng các tọa độ địa phương. Tại mỗi nút phần tử có ba bậc tự do là các chuyển vị của nút theo các phương x, y và z.

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (7.1)$$



Hình 7.4. Phần tử tứ diện bốn nút và các bậc tự do.

Và phần tử có mười hai bậc tự do

$$\{q\}_e = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4\}^T \quad (7.2)$$

Do đó ba chuyển vị thành phần u, v và w được xấp xỉ hóa bởi các đa thức tuyến tính sau.

$$u(x, y, z) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z$$

$$v(x, y, z) = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 z \quad (7.3)$$

$$w(x, y, z) = a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z$$

với các $a_1, a_2 \dots a_{12}$ là các tham số hay thành phần của vectơ tham số $\{a\}$

Cũng như đã biết trong các phần trước, bằng việc đồng nhất các bậc tự do với giá trị các hàm chuyển vị tại điểm nút tương ứng sau.

$$q_1 = u(x_1, y_1, z_1), \quad q_2 = v(x_1, y_1, z_1), \quad q_3 = w(x_1, y_1, z_1)$$

$$q_4 = u(x_2, y_2, z_2), \quad q_5 = v(x_2, y_2, z_2), \quad q_6 = w(x_2, y_2, z_2) \quad (7.4)$$

$$q_7 = u(x_3, y_3, z_3), \quad q_8 = v(x_3, y_3, z_3), \quad q_9 = w(x_3, y_3, z_3)$$

$$q_{10} = u(x_4, y_4, z_4), \quad q_{11} = v(x_4, y_4, z_4), \quad q_{12} = w(x_4, y_4, z_4)$$

Chúng ta sẽ biểu diễn được các hàm chuyển vị như các tổ hợp tuyến tính của các hàm dạng tuyến tính N_i ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 N_i u_i = \sum_{i=1}^4 N_i q_{3i-2}$$

$$v(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 N_i v_i = \sum_{i=1}^4 N_i q_{3i-1} \quad (7.5)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 N_i w_i = \sum_{i=1}^4 N_i q_{3i}$$

trong đó: Các hàm dạng N_i tuyến tính (đã trình bày ở chương 5)

$$N_i(x, y, z) = \frac{1}{6 V_e} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (7.6)$$

ở đây: V là thể tích khối phần tử.

$$V_e = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (7.7)$$

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix} \quad (7.8)$$

$$c_i = - \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix}, \quad d_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}$$

Với chú ý các chỉ số $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow l$ thay lần lượt theo thứ tự $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

Vậy trường chuyển vị của phần tử được biểu diễn trong dạng ma trận như sau.

$$\begin{matrix} \{\underline{u}\}_e \\ (3 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \\ (3 \times 12) \end{matrix} = [N] \begin{matrix} \{q\}_e \\ (12 \times 1) \end{matrix} \quad (7.9)$$

trong đó

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Vectơ biến dạng với đủ sáu thành phần được biểu diễn theo vectơ chuyển vị nút phần tử trong dạng quen thuộc đã biết ở chương 2.

$$\{\epsilon\}_e = [B] \{q\}_e \quad (7.11)$$

$$\begin{matrix} \text{trong đó } \{\epsilon\}_e = \begin{Bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^T \\ [B] = \begin{bmatrix} [b] & [N] \end{bmatrix} \\ (6 \times 12) \quad (6 \times 3) \quad (3 \times 12) \end{matrix} \quad (7.12)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] = \frac{1}{6 V_e} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 & 0 \\ 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_2 & c_2 & 0 & d_3 & c_3 & 0 & d_4 & c_4 \\ d_1 & 0 & b_1 & d_2 & 0 & b_2 & d_3 & 0 & b_3 & d_4 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Để thấy từ (7.11) và (7.13) là biến dạng sẽ không đổi trong mỗi phần tử.

Do vậy ứng suất cũng không đổi trong phạm vi phần tử và được xác định theo định luật Hooke:

$$\{\sigma\}_e = [D] \{\epsilon\}_e \quad (7.14)$$

$$\text{với vectơ ứng suất } \{\sigma\}_e = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \right\}^T \quad (7.15)$$

Và ma trận các hệ số đàn hồi

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể xyz là:

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \quad (7.17)$$

Vì các ma trận [D] và [B] chỉ chứa các hằng số nên dễ thấy là

$$[K]_e = V_e [B]^T [D] [B] \quad (7.18)$$

(12 × 12)

Vectơ tải phần tử do sự thay đổi nhiệt độ T, lực thể tích không đổi $\{g\} = \{g_x \quad g_y \quad g_z\}^T$ và lực mặt phân bố đều $\{P\} = \{p_x \quad p_y \quad p_z\}^T$ trên mặt nào đó của phần tử (thí dụ mặt 1 - 2 - 3)

$$\{P\}_e = \int_{V_e} [B]^T [D] \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dV + \int_{V_e} [N]^T \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} dV + \int_{S_{123}} [N]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} dS \quad (7.19)$$

$$\{P\}_e = \frac{E \alpha T V_e}{(1 - 2\nu)} [B]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{V_e}{4} \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \\ g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} + \frac{S_{123}}{3} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

trong đó S_{123} là diện tích mặt 1 - 2 - 3 của phần tử.

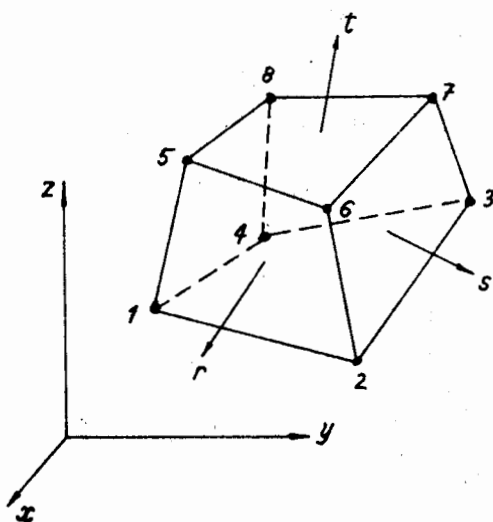
Như vậy có thể nhận xét rằng trong trường hợp lực thể tích không đổi thì quy đổi về các nút là như nhau. Còn lực mặt cũng được quy về phân bố đều trên 3 nút xác định bề mặt mà lực mặt tác dụng. Còn tại nút không thuộc mặt này, các lực quy đổi này là bằng không.

Có thể thấy rằng do chuyển vị là các đa thức tuyến tính nên tính liên tục của chuyển vị dọc theo các mặt tiếp giáp với phần tử kề sát nó sẽ tự thỏa mãn. Tuy nhiên, trong thực tế người ta ít dùng phần tử này bởi khi rời rạc hóa miền khảo sát rất dễ nhầm lẫn, sai sót và phức tạp.

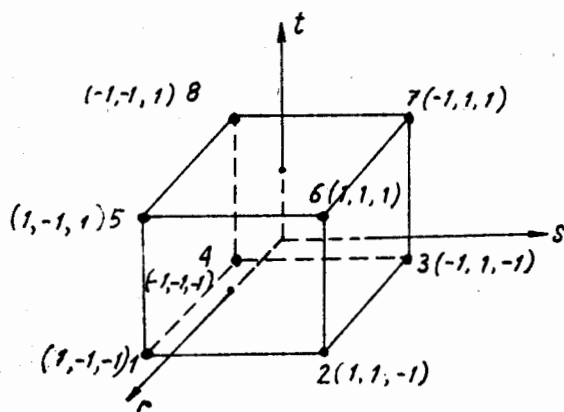
§7.2. PHẦN TỬ LỰC DIỆN

Trong bài này chúng ta sẽ xét phần tử khối lực diện đơn giản nhất với tám nút là các đỉnh của khối lực diện và mỗi nút có ba bậc tự do là các chuyển vị nút theo các phương x , y và z của hệ trục tọa độ tổng thể. Để thuận tiện và đơn giản, chúng ta cũng xem nó như một phần tử đẳng tham số, tức là cả dạng hình học của phần tử, cả các hàm chuyển vị được xem như là các tổ hợp tuyến tính của cùng tám hàm dạng như sau.

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + rr_i) (1 + ss_1) (1 + tt_i) \text{ với } i = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (7.21)$$



Trong hệ tọa độ tổng thể



Trong hệ tọa độ địa phương

Hình 7.5. Phần tử lục diện tám nút

trong đó r, s, t là các tọa độ tự nhiên (Hình 7.5),

r_i, s_i, t_i là các giá trị của các tọa độ tự nhiên của nút i và chỉ có giá trị là 1 hay -1.

Như vậy trong hệ tọa độ tự nhiên (địa phương) phần tử là một khối lập phương mặc dù trong hệ tọa độ vuông góc tổng thể nó có thể là một khối lục diện có dạng bất kỳ.

Hình dạng hình học của phần tử được cho bởi

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i \quad (7.22a)$$

Hay ở dạng ma trận

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ z_8 \end{Bmatrix} \quad (7.22b)$$

trong đó:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

(3 × 24)

Còn x_i, y_i, z_i là các tọa độ của nút i trong hệ tọa độ vuông góc tổng thể.

Và các hàm chuyển vị theo các phương x, y, z của hệ trục tọa độ tổng thể cũng

có thể được biểu diễn cũng bởi các hàm dạng trên, tức là

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^8 N_i w_i \quad (7.25)$$

trong đó u_i, v_i, w_i là các bậc tự do của nút i

Trong dạng ma trận, trường chuyển vị của phần tử biểu diễn theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ là:

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ w_8 \end{Bmatrix} = [N] \{q\}_e \quad (7.26)$$

Sử dụng (7.26) biến dạng của phần tử được biểu diễn theo $\{q\}_e$ như sau:

$$\{\epsilon\}_e = [B] \{q\}_e \quad (7.27)$$

$$\text{Trong đó: } \{\epsilon\}_e = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T \quad (7.28)$$

Ma trận biến dạng $[B]$ là

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial \\ \partial \\ \partial \end{bmatrix} [N] = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & [B_3] & \dots & [B_8] \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

(6 × 24) (6 × 3) (3 × 24)

ở đây: $[B_i] = \begin{bmatrix} \partial \\ \partial \\ \partial \end{bmatrix} [N_i]$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

(6 × 3)

Vì các hàm N_i là hàm của các biến r, s, t , nên để tìm các đạo hàm của N_i theo các tọa độ vuông góc x, y, z chú ý là cần sử dụng ma trận Jacobi của phép biến đổi tọa độ. Cụ thể, như đã đề cập ở chương 5 và chương 6

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (7.31)$$

trong đó ma trận Jacobi là:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \dots 8 \quad (7.32)$$

Bằng cách thay (7.22a) vào (7.32) ta có được

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial r} z_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial s} z_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial t} z_i \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial r} &= \frac{1}{8} r_i (1 + s s_i) (1 + t t_i) \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} &= \frac{1}{8} s_i (1 + r r_i) (1 + t t_i) \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} &= \frac{1}{8} t_i (1 + r r_i) (1 + s s_i) \end{aligned} \quad \text{với } i = 1, 2, 3, \dots 8 \quad (7.34)$$

Như vậy, từ (7.31) chúng ta tìm được các đạo hàm các hàm N_i theo các tọa độ vuông góc x, y, z như sau:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (7.34)$$

Để dễ hình dung, nếu nghịch đảo của ma trận Jacobi được viết ở dạng sau:

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{13} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} & \bar{J}_{32} & \bar{J}_{33} \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

thì các đạo hàm của các hàm N_i theo các tọa độ vuông góc là

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \bar{J}_{11} \frac{\partial N_i}{\partial r} + \bar{J}_{12} \frac{\partial N_i}{\partial s} + \bar{J}_{13} \frac{\partial N_i}{\partial t} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \bar{J}_{21} \frac{\partial N_i}{\partial r} + \bar{J}_{22} \frac{\partial N_i}{\partial s} + \bar{J}_{23} \frac{\partial N_i}{\partial t} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} &= \bar{J}_{31} \frac{\partial N_i}{\partial r} + \bar{J}_{32} \frac{\partial N_i}{\partial s} + \bar{J}_{33} \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.36)$$

Như vậy ma trận biến dạng $[B]$ là tìm được

Sử dụng công thức cơ bản ở chương 2 về ma trận độ cứng phần tử

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \quad (7.37)$$

(24 × 24) (24 × 6) (6 × 6) (6 × 24)

Hay, cụ thể hơn, sử dụng (7.29) ta thấy

$$[K]_e = \int_{V_e} \begin{bmatrix} [B_1]^T \\ [B_2]^T \\ \vdots \\ [B_8]^T \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & \dots & [B_8] \end{bmatrix} dV \quad (7.38)$$

Và $[K]_e$ được đưa về dạng ma trận khối

$$[K]_e = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & \dots & [K_{18}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & \dots & [K_{28}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K_{81}] & [K_{82}] & \dots & [K_{88}] \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

trong đó:

$$[K_{ij}] = \int_{V_e} [B_i]^T [D] [B_j] dV \quad \text{với} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, 8 \\ j = 1, 2, \dots, 8 \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

$(3 \times 3) \quad (3 \times 6) \quad (6 \times 6) \quad (6 \times 3)$

Cũng dễ thấy rằng

$$[K_{ij}] = [K_{ji}]^T \quad (7.41)$$

Vì các ma trận $[B_i]$ được biểu diễn theo các tọa độ tự nhiên nên tích phân trên cũng cần thực hiện theo các tọa độ tự nhiên với chú ý rằng

$$dV = |J| dr ds dt$$

trong đó: $|J|$ là định thức của ma trận Jacobi $[J]$

Và các ma trận con $[K_{ij}]$ được xác định như sau:

$$[K_{ij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i]^T [D] [B_j] |J| dr ds dt \quad (7.42)$$

Tích phân này không cho được kết quả dạng tường minh nên phép cầu phương Gauss được sử dụng để tính. Để có kết quả chính xác chúng ta áp dụng phép cầu phương Gauss với sơ đồ hai điểm tính Gauss, tất nhiên theo cả ba phương r , s và t . Khi đó như đã trình bày trong chương 5, ma trận con $[K_{ij}]$ được tính theo công thức sau:

$$[K_{ij}] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 W_i W_j W_k \left([B_i]^T [D] [B_j] \right) \Big|_{(r_i, s_j, t_k)} \quad (7.43)$$

$$[K_{ij}] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left([B_i]^T [D] [B_j] \right) \Big|_{(r_i, s_j, t_k)} \quad (7.44)$$

Vì trong trường hợp này, với sơ đồ hai điểm tính Gauss thì

$$W_i = W_j = W_k = 1 \quad (\text{với } i, j, k = 1, 2)$$

Ngoài ra, trong đó cần hiểu rằng

$$\left([B_i]^T [D] [B_j] |J| \right) \Big|_{(r_i, s_j, t_k)} \quad (7.45)$$

là giá trị của

$$([B_i]^T [D] [B_j] | J |)$$

tại các điểm tính Gauss có tọa độ (r_i, s_j, t_k) với $r_i = \pm 0,57735...$, $s_j = \pm 0,57735...$, $t_k = \pm 0,57735...$

Vectơ tải phần tử: Chúng ta sẽ tính vectơ tải phần tử cho một số nguyên nhân riêng rẽ như sau:

Do biến thiên nhiệt độ T , khi đó vectơ tải phần tử được xác định như sau

$$\{P\}_e = \int_{V_e} [B^T] [D] \{\epsilon_0\} dV = \int_{V_e} [B^T] [D] \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dV \quad (7.45)$$

$$V_i \quad [D] \{\epsilon_0\} = \frac{E \alpha T}{1 - 2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

và sử dụng (7.29) ta có biểu diễn $\{P\}_e$ ở dạng

$$\{P\}_e = \left\{ \{P_1\}^T \{P_2\}^T \{P_3\}^T \dots \{P_8\}^T \right\}^T$$

trong đó:

$$\{P_i\} = \frac{E \alpha T}{1 - 2\nu} \int_{V_e} [B_i^T] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dV \quad (\text{với } i = 1, 2, \dots, 8) \quad (7.46)$$

là vectơ lực tải tại nút i .

Thay $[B_i]$ từ (7.30) vào (7.46), và thực hiện phép nhân ma trận trong biểu thức tích phân, ta có:

$$\{P_i\} = \frac{E \alpha T}{1 - 2\nu} \int_{V_e} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} dV = \frac{E \alpha T}{1 - 2\nu} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} |J| dr ds dt$$

Hay sử dụng (7.34)

$$\{P_i\} = \frac{E \alpha T}{1 - 2\nu} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{Bmatrix} |J| dr ds dt \quad (7.47)$$

Tích phân được tính chính xác theo sơ đồ hai điểm tính của phép cầu phương Gauss như đã nói ở trên, (nhớ là trong trường hợp này các trọng số đều có giá trị bằng 1)

$$\{P_i\} = \frac{E \alpha T}{1 - 2\nu} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 ([J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{Bmatrix} |J|) \bigg|_{(r_i, s_j, t_k)} \quad (7.48)$$

Do lực khối $g = \{g_x \ g_y \ g_z\}^T$, vectơ tải phần tử được xác định theo công thức đã có ở chương 2 như sau:

$$\{P\}_e = \int_{V_e} [N]^T \{g\} dV \quad (7.49)$$

Cũng như trên, để thấy rằng vectơ lực khối tại nút i là

$$\{P\}_i = \int_{V_e} [N_i] \{g\} dV \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (7.50)$$

trong đó:

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \text{ và } \{g\} = \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix}$$

Vậy:

$$\{P_i\} = \int_{V_0} \begin{Bmatrix} N_i g_x \\ N_i g_y \\ N_i g_z \end{Bmatrix} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} N_i g_x \\ N_i g_y \\ N_i g_z \end{Bmatrix} |J| dr ds dt \quad (7.51)$$

Và bằng cách dùng sơ đồ hai điểm tính của phép cầu phương Gauss như trên ta tính $\{P_i\}$ như sau:

$$\{P_i\} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left(\begin{Bmatrix} N_i g_x \\ N_i g_y \\ N_i g_z \end{Bmatrix} |J| \right) \bigg|_{(r_i, s_j, t_k)} \quad (7.52)$$



Chương 8

Bài toán động lực học kết cấu

§8.1 PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC HỌC KẾT CẤU

Trong thiết kế kỹ thuật, người kỹ sư không thể không tính tới dao động của công trình hay máy móc do ảnh hưởng của các tác động động lực bên ngoài và của bản thân công trình hay máy móc gây ra trong quá trình sử dụng và làm việc như gió, động đất, máy móc gây chấn động, hay các tải trọng động do chính sự vận hành của các chi tiết gây ra...

Dưới các tác động động lực, chuyển vị, ứng suất và biến dạng trong vật thể khảo sát là phụ thuộc thời gian. Theo mô hình tương thích của phương pháp phần tử hữu hạn, cũng như cách phân tích các bài toán tĩnh ở trên, các hàm chuyển vị của phần tử có thể được biểu diễn qua các bậc tự do của phần tử với chú ý rằng các bậc tự do này là các hàm của thời gian t như sau :

$$\{\underline{u}\}_e = \{\underline{u}(x, y, z, t)\}_e = \begin{Bmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{Bmatrix} = [N(x,y,z)] \{q(t)\}_e \quad (8.1)$$

trong đó: $\{\underline{u}\}_e$ là vectơ chuyển vị và là hàm các tọa độ điểm và thời gian t , $[N]$ là ma trận các hàm dạng. Còn $\{q(t)\}_e$ hay để gọn $\{q\}_e$ là vectơ chuyển vị nút phần tử mà các thành phần của nó là các hàm của thời gian t .

Biến dạng của phần tử cũng là hàm của thời gian và được biểu diễn qua chuyển vị nút.

$$\{\varepsilon\}_e = [\partial]\{\underline{u}\}_e = [\partial][N]\{q\}_e = [B]\{q\}_e \quad (8.2)$$

Còn ứng suất trong phần tử :

$$\{\sigma\}_e = [D]\{\varepsilon\}_e = [D][B]\{q\}_e \quad (8.3)$$

Do chuyển vị là hàm của thời gian, các điểm của phần tử chuyển động với vận tốc bằng đạo hàm bậc nhất của chuyển vị lấy theo thời gian t .

$$\{\dot{\underline{u}}\}_e = [N(x,y,z)]\{\dot{q}\}_e \quad (8.4)$$

ở đây : $\{\dot{q}\}_e$ là vectơ vận tốc các điểm nút của phần tử và gọi là *vectơ vận tốc nút phần tử*.

Để có được phương trình động lực học của chuyển động đối với toàn vật thể, chúng ta sẽ sử dụng phương trình Lagrange loại 2 trong dạng ma trận toàn vật thể với chú ý rằng động năng và thế năng của cả hệ hoàn toàn có thể biểu diễn theo các tọa độ suy rộng - các chuyển vị nút.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} - \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \right\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial q} \right\} = \{0\} \quad (8.5)$$

$$\text{trong đó : } L = T - \Pi \quad (8.6)$$

và được gọi là hàm Lagrange.

T là động năng, Π là thế năng của hệ, R là hàm tiêu tán.

Còn q và $\dot{q}$ được hiểu là vectơ chuyển vị nút và vận tốc nút tổng thể $\{\bar{q}\}$ và $\{\dot{\bar{q}}\}$

Với một phần tử, động năng T_e , thế năng Π_e có thể được tính như sau :

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{u}\}_e^T \{\dot{u}\}_e dV \quad (8.7)$$

$$\Pi_e = U_e - A_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\epsilon\}_e^T \{\sigma\} dV - \int_{V_e} \{q\}_e^T \{g\} dV - \int_{S_i} \{q\}_e^T \{p\} dS \quad (8.8)$$

ở đây : ρ : khối lượng riêng vật liệu phần tử.

Nếu xem rằng tồn tại các lực cân tỉ lệ với vận tốc chuyển động thì biểu thức hàm tiêu tán R_e của phần tử được biểu diễn là :

$$R_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \mu \{\dot{u}\}_e^T \{\dot{u}\}_e dV \quad (8.9)$$

với μ là hệ số cản. Hệ số này phụ thuộc vào môi trường mà hệ đang khảo sát chuyển động, vào hiện tượng ma sát trong của vật liệu, vào độ ma sát của các liên kết. Bằng cách sử dụng các công thức đã trình bày ở chương 2 và các công thức từ (8.1) đến (8.4) ta có thể biểu diễn động năng, thế năng và hàm tiêu tán đối với phần tử theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ và vectơ vận tốc nút phần tử $\{\dot{q}\}_e$ như sau :

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_e^T \left(\int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV \right) \{\dot{q}\}_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_e^T [M]_e \{\dot{q}\}_e \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \frac{1}{2} \{q\}_e^T \left(\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{q\}_e - \{q\}_e^T \cdot \left(\int_{V_e} [N]^T \{g\} dV + \int_{S_i} [N]^T \{p\} dS \right) \\ &= \frac{1}{2} \{q\}_e^T [K]_e \{q\}_e - \{q\}_e^T \{P\}_e \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$R_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_e^T \left(\int_{V_e} \mu [N]^T [N] dV \right) \{\dot{q}\}_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_e^T [C]_e \{\dot{q}\}_e \quad (8.12)$$

trong đó; ta gọi

$$[M]_e \text{ là ma trận khối lượng phần tử và : } [M]_e = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV \quad (8.13)$$

$$[K]_e - \text{ma trận độ cứng phần tử. } [K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \quad (8.14)$$

$$[C]_e - \text{ma trận cản của phần tử, } [C]_e = \int_{V_e} \mu [N]^T [N] dV \quad (8.15)$$

$\{P\}_e$ - vectơ tải phần tử

$$\{P\}_e = \int_{V_e} [N]^T \{g\} dV + \int_{S_i} [N]^T \{p\} dS \quad (8.16)$$

Như vậy, cũng lập luận như ở chương 2, bằng cách "ghép nối" phần tử trên toàn hệ, các đại lượng như động năng, thế năng toàn phần và hàm tiêu tán năng lượng của toàn hệ được biểu diễn qua vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{\bar{q}\}$ và vectơ vận tốc nút tổng thể $\{\dot{\bar{q}}\}$ như sau :

$$T = \sum^E T_e = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{q}}\}^T \left(\sum^E [M]_e \right) \{\dot{\bar{q}}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{q}}\}^T [\bar{M}] \{\dot{\bar{q}}\} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum^E \Pi_e = \frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T \left(\sum^E [K]_e \right) \{\bar{q}\} - \{\bar{q}\}^T \left(\sum^E \{P\}_e + \{P\}_n \right) \\ &= \frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T [\bar{K}] \{\bar{q}\} - \{\bar{q}\}^T \{\bar{P}\} \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$R = \sum^E R_e = \frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T \left(\sum^E [C]_e \right) \{\dot{\bar{q}}\} = \frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T [\bar{C}] \{\dot{\bar{q}}\} \quad (8.19)$$

trong đó :

$$[\bar{M}] - \text{ma trận khối lượng tổng thể, } [\bar{M}] = \sum^E [M]_e \quad (8.20)$$

$$[\bar{K}] - \text{ma trận độ cứng tổng thể, } [\bar{K}] = \sum^E [K]_e \quad (8.21)$$

$$[\bar{C}] - \text{ma trận cản tổng thể, } [\bar{C}] = \sum^E [C]_e \quad (8.22)$$

$$\{\bar{P}\} - \text{vectơ tải tổng thể, } \{\bar{P}\} = \sum^E \{P\}_e + \{P\}_n \quad (8.23)$$

ở đây $\{P\}_n$ là vectơ các tải trọng tập trung đặt tại các nút.

Chú ý rằng trong các biểu thức trên dấu tổng $\sum^E$ là tổng quy ước, không phải

là phép cộng ma trận thông thường, mà có thể hiểu là phép cộng có sắp xếp khi ghép nối phần tử như đã trình bày trong chương 2.

Thay các biểu thức của động năng, thế năng, hàm tiêu tán năng lượng toàn hệ cho trong (8.17), (8.18) và (8.19) vào phương trình Lagrange (8.5) chúng ta có được:

$$[\overline{M}]\{\ddot{q}\} + [\overline{C}]\{\dot{q}\} + [\overline{K}]\{q\} = \{\overline{P}\} \quad (8.24)$$

trong đó : $\{\ddot{q}\}$ là vectơ gia tốc nút tổng thể.

Sau khi áp đặt các điều kiện động học, chúng ta nhận được phương trình động lực học của hệ trong dạng.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\} \quad (8.25)$$

Phương trình (8.25) còn được gọi là *phương trình dao động cưỡng bức của kết cấu hay vật thể theo mô hình tương thích của phương pháp PTHH*.

Nếu xem rằng trong quá trình dao động, hệ không hề mất mát năng lượng do các nguyên nhân như đã kể như ma sát trong, ma sát của các liên kết, lực cản của môi trường,... tức là nếu bỏ qua sự cản thì phương trình dao động của kết cấu hay vật thể sẽ là :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\} \quad (8.26)$$

Phương trình (8.25) được gọi là phương trình dao động cưỡng bức không cản.

§8.2 MA TRẬN KHỐI LƯỢNG TƯƠNG THÍCH VÀ MA TRẬN KHỐI LƯỢNG TẬP TRUNG.

Ma trận khối lượng được cho bởi (8.13), tức

$$[M]_e = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV$$

được gọi là ma trận khối lượng tương thích (consistent mass matrix) của phần tử vì cũng chính mô hình xấp xỉ của chuyển vị sử dụng để tính ma trận độ cứng phần tử cũng được sử dụng để tính ma trận khối lượng phần tử.

Trong bài toán động lực học, trong một số trường hợp người ta còn sử dụng dạng đơn giản nhất của ma trận khối lượng bằng cách đặt các khối lượng tập trung tại các điểm nút theo hướng của các bậc tự do chuyển vị nút và liên hệ với quán tính của hệ trên các chuyển dịch thẳng hay quay của chính điểm nút đó. Còn phần thể tích còn lại của phần tử xem như không có khối lượng và không tham gia vào chuyển động. Ma trận khối lượng này được gọi là ma trận khối lượng tập trung (lumped mass matrix) và là một ma trận đường chéo.

Thí dụ, với phần tử một chiều chịu biến dạng dọc trục (phần tử thanh dàn), khi hàm chuyển vị dọc trục $u(x)$ được xấp xỉ hóa bằng một đa thức tuyến tính, chúng ta có:

$$u(x) = [N] \{q\}_e$$

$$\text{với} \quad [N] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \left(\frac{x}{l}\right) \end{bmatrix}$$

$$\text{và} \quad \{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} u(x=0) \\ u(x=l) \end{Bmatrix}_e$$

thì theo (8.13) ma trận khối lượng tương thích của phần tử là :

$$[M]_e = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV = \frac{\rho Fl}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

trong đó ρ là khối lượng riêng vật liệu, F là diện tích tiết diện ngang, l là chiều dài phần tử.

Thì ma trận khối lượng tập trung của phần tử này có được bằng cách chia đều khối lượng phần tử cho hai nút, hay

$$[M]_e = \frac{\rho Fl}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Có thể thấy rằng ma trận khối lượng tập trung sẽ cho kết quả gần chính xác trong các trường hợp kết cấu là nhẹ và có các vật nặng (các khối lượng tập trung) đặt sẵn tại các nút. Tuy nhiên, vì có dạng ma trận đường chéo nên ma trận khối lượng tập trung tổng thể được xây dựng đơn giản, tốn ít bộ nhớ và cũng làm tính toán sau này đơn giản hơn. Còn việc sử dụng ma trận khối lượng tương thích sẽ cho kết quả chính xác nếu dạng dao động thực có thể biểu diễn bằng tổ hợp của các hàm dạng $[N]$. Tuy nhiên, các hàm dạng này thường là các hàm dạng khi phân tích tĩnh nên sự phân bố khối lượng theo cách này cũng chỉ là gần đúng. Mặc dù vậy ma trận khối lượng tương thích vẫn đáp ứng yêu cầu chính xác trong phần lớn các bài toán thực tế.

§8.3 MA TRẬN KHỐI LƯỢNG TƯƠNG THÍCH TRONG HỆ TỌA ĐỘ TỔNG THỂ

Khi xây dựng, dẫn dắt để thiết lập công thức tính ma trận khối lượng tương thích phần tử, thường chúng ta sử dụng một hệ tọa độ địa phương phù hợp sao cho việc xây dựng công thức là dễ dàng và đơn giản. Các hệ tọa độ địa phương này có thể là khác phương với hệ tọa độ tổng thể chung cho toàn hệ. Do đó, trước khi ghép nối phần tử để xây dựng ma trận khối lượng tương thích tổng thể, ta cần chuyển các ma trận khối lượng phần tử vào hệ tọa độ tổng thể.

Gọi : $[M]_e$, $\{q\}_e$ và $\{\dot{q}\}_e$ là các ma trận khối lượng, vectơ chuyển vị nút và vectơ vận tốc nút phần tử trong hệ tọa độ địa phương xyz.

Và $[M']_e$, $\{q'\}_e$ và $\{\dot{q}'\}_e$ là các ma trận khối lượng, vectơ chuyển vị nút và vectơ vận tốc nút phần tử trong hệ tọa độ tổng thể x'y'z'.

Thì, như đã trình bày ở chương 2, giữa vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ và $\{q'\}_e$ có quan hệ

$$\{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e \quad (8.28)$$

trong đó $[T]_e$ là ma trận chuyển đổi hệ trục tọa độ.

Và cũng dễ thấy một cách hiển nhiên,

$$\{\dot{q}\}_e = [T]_e \{\dot{q}'\}_e \quad (8.29)$$

Động năng của phần tử, như (8.10) đã cho :

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_e^T [M]_e \{\dot{q}\}_e \quad (8.30)$$

Nếu thay (8.29) vào (8.30), ta có

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}'\}_e^T [T]_e^T [M]_e [T]_e \{\dot{q}'\}_e$$

$$\text{Hay } T_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}'\}_e^T [M']_e \{\dot{q}'\}_e \quad (8.31)$$

Vậy, có thể thấy ma trận khối lượng tương thích của phần tử trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$ là

$$[M']_e = [T]_e^T [M]_e [T]_e \quad (8.32)$$

Chú ý là với các phần tử mà các bậc tự do của nó chỉ là các chuyển vị thẳng của các nút, thì ma trận khối lượng tương thích sẽ là bất biến đối với phương chiều và vị trí của các trục tọa độ. Do đó ma trận $[M]_e$ và $[M']_e$ sẽ là như nhau đối với các phần tử thanh dầm, các phần tử hai chiều của bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng, cũng như đối với các phần tử khối tứ diện, lục diện chỉ có các bậc tự do là chuyển vị thẳng các nút. Sau đây chúng ta sẽ tìm ma trận khối lượng tương thích của một số loại phần tử thường dùng.

1. Ma trận khối lượng tương thích của phần tử thanh dầm không gian.

Như đã biết ở chương 3, với phần tử thanh dầm không gian, các hàm chuyển vị được xấp xỉ hóa bởi các đa thức tuyến tính và biểu diễn qua vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q'\}_e$ như sau :

$$\{\underline{u}(x)\}_e = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix}_e = \begin{matrix} [N] \\ (3 \times 6) \end{matrix} \begin{matrix} \{q'\}_e \\ (6 \times 1) \end{matrix}$$

trong đó :

$$[N] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 & 0 & \frac{x}{e} & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 & 0 & \frac{x}{e} & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 & 0 & \frac{x}{e} \end{bmatrix}$$

$$\text{và } \{q\}_e = \{u'_1 \quad v'_1 \quad w'_1 \quad u'_2 \quad v'_2 \quad w'_2\}^T$$

với (u'_i, v'_i, w'_i) là chuyển vị theo các trục tọa độ tổng thể x', y', z' của nút i .

Nếu phần tử có mặt cắt ngang F và khối lượng riêng ρ không đổi dọc theo chiều dài phần tử thì ma trận khối lượng của nó sẽ là :

$$[M]_e = [M']_e = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV = \frac{\rho F l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

2. Ma trận khối lượng của phần tử thanh chịu xoắn dọc trục.

Như đã trình bày ở chương 3, biến dạng xoắn dọc trục của một phần tử một chiều là góc xoắn $\theta(x)$ của mặt cắt ngang bất kỳ trên phần tử được xấp xỉ hóa bởi một đa thức bậc nhất và được nội suy qua các bậc tự do là góc xoắn của các nút phần tử.

$$\theta(x) = [N] \{q\}_e \quad (8.34)$$

ở đây : $[N]$ là ma trận các hàm dạng tuyến tính.

$$[N] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \quad (8.35)$$

$$\text{và } \{q\}_e = \begin{Bmatrix} \theta(x=0) \\ \theta(x=l) \end{Bmatrix}_e$$

Do hàm chuyển vị là hàm góc xoắn $\theta(x,t)$ nên có thể thấy rằng vận tốc chuyển động của một điểm cách tâm tiết diện khoảng cách r là :

$$r \cdot \dot{\theta}(x,t) = r [N] \{\dot{q}\}_e \quad (8.36)$$

trong đó : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ là vận tốc góc của điểm đang xét.

Vậy động năng T_e của phần tử trong chuyển động xoắn quanh trục x của phần tử là :

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho (r \dot{\theta})^2 dV = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_e^T \left(\int_{V_e} \rho [N]^T [N] r^2 dV \right) \{\dot{q}\}_e$$

Hay

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_e^T [M]_e \{\dot{q}\}_e$$

trong đó : $[M]_e$ là ma trận khối lượng tương thích của phần tử thanh biến dạng xoắn dọc trục (trong hệ tọa độ địa phương).

$$[M]_e = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] r^2 dV \quad (8.37)$$

Với ma trận hàm dạng (8.35), và khi tiết diện ngang F , khối lượng riêng ρ là không đổi trên suốt chiều dài l của phần tử, thì ta có :

$$[M]_e = \int_0^l \rho [N]^T [N] dx \int_F r^2 dF = \frac{\rho l J_x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

ở đây $J_x = \int_F r^2 dF$ là mômen quán tính bậc hai của mặt cắt ngang đối với tâm mặt cắt ngang.

3. Ma trận khối lượng tương thích của phần tử khung không gian.

Cũng từ chương 3, ta biết rằng một phần tử khung không gian có 12 bậc tự do gồm 6 chuyển vị thẳng và 6 chuyển vị góc. Trong hệ trục tọa độ địa phương với trục x là trục phần tử, các trục y, z cùng phương với các trục chính của mặt cắt ngang, thì trường chuyển vị có thể được biểu diễn như sau :

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{bmatrix}_e = [N] \{\underline{q}\}_e \quad (8.39)$$

(3 × 12) (12 × 1)

$$\text{ở đây : } \{\underline{q}\}_e = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2}\}^T \quad (8.40)$$

và

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(3)} & 0 & 0 & 0 & N_2^{(3)} & 0 & N_3^{(3)} & 0 & 0 & 0 & N_4^{(3)} \\ 0 & 0 & N_1^{(3)} & 0 & N_2^{(3)} & 0 & 0 & 0 & N_3^{(3)} & 0 & N_4^{(3)} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

ở đây : $N_i^{(1)}$ ($i = 1, 2$) là các hàm dạng Lagrange tuyến tính.

$$N_1^{(1)} = 1 - \frac{x}{l}, \quad N_2^{(1)} = \frac{x}{l} \quad (8.42)$$

$N_i^{(3)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) là các hàm dạng Hecmit bậc ba.

$$N_1^{(3)} = \frac{1}{l^3} (2x^3 - 3lx^2 + l^3), \quad N_3^{(3)} = -\frac{1}{l^3} (2x^3 - 3lx^2) \quad (8.43)$$

$$N_2^{(3)} = \frac{1}{l^2} (x^3 - 2lx^2 + l^2x), \quad N_4^{(3)} = \frac{1}{l^2} (x^3 - lx^2)$$

Và ma trận khối lượng tương thích của phần tử khung trong hệ tọa địa phương xyz là :

$$[M]_e = \int_V \rho [N]^T [N] dV \quad (8.44)$$

$$[M]_e = \rho F l \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{13}{35} & & & & & & & & & & \\ & 0 & \frac{13}{35} & & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & \frac{J_x}{3F} & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & & & & & & \\ & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} & & & & & \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & & & & \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & & & & \\ 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13l}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{6F} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{3F} & & \\ 0 & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & 0 & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & \\ 0 & -\frac{13l}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \quad (8.44)$$

với F là diện tích tiết diện ngang, J_x là momen quán tính độc cực của mặt cắt ngang, l là chiều dài phần tử.

Chú ý là, nếu thực hiện (8.44) với ma trận các hàm dạng (8.41) thì chỉ nhận được ma trận $[M]_e$ với các thành phần của các hàng và cột thứ tư và thứ mười là

bằng 0. Tuy nhiên, trong (8.45) các thành phần $M_{4,4} = M_{10,10} = \frac{1}{3} \rho l J_x$ và

$M_{4,10} = M_{10,4} = \frac{1}{6} \rho l J_x$ được bổ sung thêm vì thành phần chuyển vị góc do biến dạng

xoắn trục $\theta(x)$ là độc lập với trường chuyển vị biểu diễn theo (8.39) và chưa được kể tới trong (8.44). Nói cách khác, ta đã kể đến cả quán tính quay do biến dạng xoắn trục gây ra.

Với phần tử khung phẳng, các bậc tự do của phần tử là :

$$\{q\}_e = \left\{ u_1 \quad v_1 \quad \left(\frac{dv}{dx} \right)_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \left(\frac{dv}{dx} \right)_2 \right\}^T$$

Thì ma trận khối lượng tương thích trong hệ tọa độ địa phương sẽ là :

$$[M]_e = \rho F l \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & & \\ & \frac{13}{35} & & & & \\ 0 & & \frac{11}{210} l^2 & & & \\ & & & \frac{1}{105} l^2 & & \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13}{420} l & 0 & \frac{13}{35} & \\ 0 & -\frac{13}{420} l & -\frac{1}{140} l^2 & 0 & -\frac{11}{210} l & \frac{1}{105} l^2 \end{bmatrix} \quad (8.46)$$

Còn với phần tử dầm, vector các bậc tự do chỉ còn :

$$\{q\}_e = \left\{ v_1 \quad \left(\frac{dv}{dx} \right)_1 \quad v_2 \quad \left(\frac{dv}{dx} \right)_2 \right\}^T$$

và ma trận khối lượng tương thích là :

$$[M]_e = \frac{\rho F l}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & \\ 22l & 4l^2 & & \\ 54 & 13l & 156 & \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

Khi các mặt cắt ngang của phần tử khung, nằm trên là không nhỏ, thì ảnh hưởng của quán tính quay và biến dạng trượt trở nên đáng kể với dao động của hệ. Khi đó cần kể thêm các ảnh hưởng này trong phân tích.

4. Ma trận khối lượng tương thích của phần tử dạng tam giác và chữ nhật trong bài toán phẳng.

Với phần tử dạng tam giác, như đã biết ở chương 4, trong bài toán phẳng, các phần tử dạng tam giác có 6 bậc tự do là các chuyển vị nút.

$$\{q\}_e = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\}_e^T$$

và trường chuyển vị được biểu diễn theo các bậc tự do này là :

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}_e = [N(x,y)] \{q\}_e$$

$(2 \times 6) \quad (6 \times 1)$

Với ma trận $[N]$ có dạng

$$[N(x,y)] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

trong đó các hàm dạng $N_i(x,y)$ đã được trình bày trong chương 4.

Vậy, có thể tính ma trận khối lượng tương thích của phần tử này theo (8.13)

$$[M]_e = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV$$

$$[M]_e = \frac{\rho A t}{12} \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & \\ 1 & 0 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Đối xứng} \quad (8.48)$$

trong đó : ρ là khối lượng riêng vật liệu, A là diện tích phần tử, t là độ dày của phần tử.

Cũng tương tự với phần tử dạng chữ nhật của bài toán phẳng, có 8 bậc tự do là các chuyển vị nút theo các phương x, y .

$$\{q\}_e = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}_e^T$$

và

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}_e = [N(x,y)] \{q\}_e$$

$(2 \times 8) \quad (8 \times 1)$

với $[N]$ đã có trong bài 4.3.

Ma trận khối lượng tương thích được tính theo (8.13) cho kết quả như sau.

$$[M]_e = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV$$

(8 × 8) V_e

$$[M]_e = \frac{\rho A t}{36} \begin{bmatrix} 4 & & & & & & & \\ 0 & 4 & & & & & & \\ 2 & 0 & 4 & & & & & \\ 0 & 2 & 0 & 4 & & & & \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & & \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Đối xứng} \quad (8.49)$$

ở đây A là diện tích phần tử chữ nhật và t là độ dày của phần tử.

Chú ý là các công thức (8.48) và (8.49) cũng là ma trận khối lượng theo hệ tọa độ tổng thể x' y'

5. Ma trận khối lượng tương thích của phần tử tám chịu uốn dạng tam giác :

Trong bài 6.2 đã trình bày các phân tích cho phần tử tám mỏng chịu uốn dạng tam giác (Hình 6.5). Trong đó chúng ta đã thấy rằng hàm độ võng $w(x,y)$ được xấp xỉ hóa bởi đa thức sau :

$$w(x, y) = [P(x, y)] \{a\}. \quad (8.50)$$

với ma trận các đơn thức $[P(x, y)]$ được cho bởi (6.33), và vectơ tham số $\{a\}$ gồm chín thành phần.

$$\{a\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_9\}^T$$

và được biểu diễn qua các bậc tự do của phần tử $\{q\}_e$ bởi phương trình :

$$\{a\} = [A]^{-1} \{q\}_e \quad (8.51)$$

với $[A]^{-1}$ được cho trong (6.37).

Vậy hàm độ võng được biểu diễn theo $\{q\}_e$ là :

$$w(x, y) = ([P(x,y)] [A]^{-1}) \{q\}_e \quad (8.52)$$

Ngoài ra, các điểm nằm cách mặt trung gian tám cũng có các chuyển vị theo các phương trục x, y là (công thức (6.1)).

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (8.53)$$

Vậy cả ba chuyển vị thẳng có thể được biểu diễn theo vectơ $\{q\}_e$ các bậc tự do của phần tử, với chú ý sử dụng (8.52), (8.53) sẽ là :

$$\{\underline{u}\}_e = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial}{\partial x} [P(x,y)] \\ -z \frac{\partial}{\partial y} [P(x,y)] \\ [P(x,y)] \end{bmatrix} [A]^{-1} \{q\}_e$$

$$\text{Hay } \{\underline{u}\}_e = [\bar{N}] [A]^{-1} \{q\}_e = [N] \{q\}_e \quad (8.54)$$

$(3 \times 1) \quad (3 \times 9) \quad (9 \times 9) \quad (9 \times 1) \quad (3 \times 9)$

ở đây

$$[\bar{N}] = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial}{\partial x} [P(x,y)] \\ -z \frac{\partial}{\partial y} [P(x,y)] \\ P(x,y) \end{bmatrix}_{(3 \times 9)} = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 & -2xz & -yz & 0 & -3x^2z & -z(y^2 + 2xy) & 0 \\ 0 & 0 & -z & 0 & -xz & -2yz & 0 & -z(2xy + x^2) & -3y^2z \\ 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & (x^2y + xy^2) & y^3 \end{bmatrix} \quad (8.55)$$

$$\text{và } [N] = [\bar{N}] [A]^{-1} \quad (8.56)$$

Chú ý rằng ma trận $[N]$ ở đây là khác với $[N]$ cho trong (6.29) ở bài 6.2

Vậy theo (8.13) ma trận khối lượng tương thích của phần tử tam dạng tam giác là

$$\begin{aligned} [M]_e &= \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV \\ &= \int_{V_e} \rho ([A]^{-1})^T [\bar{N}]^T [\bar{N}] [A]^{-1} dV \end{aligned} \quad (8.57)$$

Ma trận khối lượng tính theo (8.57) trên cơ sở ma trận $[N]$ cho bởi (8.56) là kể tới cả quán tính quay của phần tử do các đoạn thẳng vuông góc mặt trung bình quay xung quanh trục x và y trong quá trình tấm bị uốn.

Nếu bỏ qua quán tính quay như trong thực tế vẫn làm thì cũng cố nghĩa là bỏ qua các chuyển vị u và v . Khi đó ma trận $[\bar{N}]$ chính là $[P(x, y)]$ và ma trận $[N]$ chính là ma trận $[N]$ đã cho trong (6.39). Và ma trận khối lượng tương thích của phần tử tấm chịu uốn dạng tam giác là trong trường hợp này là:

$$\begin{aligned} [M]_e &= \rho ([A]^{-1})^T \left(\int_{V_e} [P(x,y)]^T [P(x,y)] dV \right) [A]^{-1} \\ &= \rho t ([A]^{-1})^T \left(\int_A [P(x,y)]^T [P(x,y)] dA \right) [A]^{-1} \end{aligned} \quad (8.58)$$

trong đó :

$$[P(x, y)] = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad (x^2y + xy^2) y^3] \quad (8.59)$$

6. Ma trận khối lượng tương thích của phần tử khối tứ diện.

Với phần tử khối tứ diện (Hình 7.4) trong bài 7.1, trường chuyển vị được cho bởi (7.9) với ma trận các hàm dạng như trong (7.10). Ma trận khối lượng của phần tử trong hệ tọa độ tổng thể được xác định theo (8.13) là :

$$[M]_e = \frac{\rho V_e}{20} \begin{bmatrix} 2 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.60)$$

Đối xứng

trong đó V_e là thể tích phần tử.

§8.4. DAO ĐỘNG TỰ DO - BÀI TOÁN TRỊ RIÊNG XÁC ĐỊNH TẦN SỐ DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA KẾT CẤU.

Nếu chúng ta tác động vào kết cấu một lực kích thích nào đó khiến nó lệch khỏi vị trí cân bằng hiện tại rồi ngay lập tức bỏ lực kích thích đó đi, thì kết cấu có thể sẽ thực hiện một dao động tuần hoàn. Dao động này được gọi là dao động tự do. Dao động này là một thuộc tính của kết cấu, nó phụ thuộc vào sự phân bố của khối lượng và độ cứng trong toàn kết cấu. Do có cản, biên độ của dao động này sẽ giảm dần. Dao động là tắt dần khi độ lớn của lực cản không vượt quá một giá trị giới hạn nào đó. Trường hợp ngược lại, khi lực cản lớn, kết cấu nhanh chóng trở lại vị trí cân bằng ban đầu mà không thực hiện một dao động nào ngay sau khi bỏ lực kích thích đi.

Từ (8.25), cho tải trọng ngoài $\{P\}$ bằng không, ta nhận được phương trình dao động tự do có cản của kết cấu là :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (8.61)$$

Nếu xem lực cản bằng không, kết cấu sẽ dao động liên tục với biên độ phụ

thuộc vào chuyển vị hay độ lệch ban đầu gây ra bởi lực kích thích. Các đại lượng như tần số riêng, chu kỳ hay dạng dao động của kết cấu trong dao động tự do là rất quan trọng trong việc nghiên cứu các đáp ứng động lực học của kết cấu, cũng như tránh cộng hưởng xảy ra đối với kết cấu.

Trong trường hợp không cản, phương trình dao động tự do của kết cấu có dạng:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (8.62)$$

Bằng cách xem các dao động là điều hòa với tần số góc ω và biên độ:

$$\{q\} = \{q\} \cdot e^{i\omega t} \quad (8.63)$$

thì phương trình dao động tự do (8.62) dẫn tới bài toán trị riêng có dạng :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{q\} = \{0\} \quad (8.64)$$

Với $\{q\}$ là biên độ của các chuyển vị nút khi dao động và xác định dạng dao động,

ω là tần số riêng của kết cấu.

Phương trình (8.64) được gọi là bài toán trị riêng. Phương trình (8.64) là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất và nó sẽ có nghiệm không tầm thường đối với $\{q\}$ khi và chỉ khi định thức của ma trận hệ số $([K] - \omega^2 [M])$ là bằng không, tức là :

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (8.65)$$

Điều kiện (8.65) cho ta một phương trình đại số bậc N đối với ω^2 . Giải phương trình này ta tìm được N nghiệm thực dương, tức N giá trị dương của ω^2 . Từ đó ta tìm được N giá trị tần số riêng ω_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Tương ứng với mỗi tần số riêng ω_i ta sẽ tìm được vectơ riêng tương ứng $\{q\}_i$ bằng cách thay giá trị ω_i vào phương trình (8.64) và giải ra $\{q\}_i$.

Vectơ $\{q\}_i$ cho ta các biên độ dao động của các nút và được gọi là dạng dao động (mode shape) của kết cấu tương ứng với tần số riêng thứ i .



TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Rao S.S. The Finite Element Method in Engineering, Second Edition, Pegamon Press, 1989
2. Krishnomoorthy C.S, Finite Element Analysis- Theory and Programming, Second Edition, McGraw-Hill Publishing Co, New Delhi, 1996
3. Reddy J.N., An Introduction to the Finite Element Method, McGraw- Hill Book Co., 1989
4. Zienkiewicz O.C and Taylor, R., The Finite Element Method, Volumn 1, 2, 4th Edition, McGraw- Hill, 1991
5. Bath K.J and Wilson E.L, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1976
6. Hughes T.J.R, the Finite Element Method-Liear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice- Hall, 1987
7. Kardestuncer H., Norrie D.H.,...,Finite Element Handbook, McGraw Hill, 1987
8. Istvan P. and Béla H., Végeselem Módszer- Alkalmazása Rúdszerkezetekre, Muszaki Konyvkiado, Budapest, 1987
9. Márta K. K. and Péter S., A Végeselem Módszer- Eggszeni Elemei es Elmcsládjai, Muszaki Konyvkiadó, Budapest, 1985
10. Imre B. and Gabor V., A Végeselem Modszer- Alkalmazása Lemez es Hejszerkezetekre, Muszaki Konyvkiadó, Budapest, 1986
11. Imre B., Gyorgy M., Tasmás N., Végeselem Modszer- Alkalmazása Sikbeli Feladarokra. Muszaki Konyvkiado, Budapest, 1988
12. Bảo N.X, Giang P.H, Hải V.T, Lê N.V, Phương pháp phần tử hữu hạn. Ứng dụng tính toán các công trình, Tập 1, Nhà xuất bản Nông nghiệp, Hà Nội, 1983
13. Dũng N.L, Giáo trình phương pháp phần tử hữu hạn trong cơ học, Trường Đại học Bách khoa TP. Hồ Chí Minh, 1993
14. Vũ P.A, Phương pháp phần tử hữu hạn trong tính toán kết cấu, Nhà xuất bản Trẻ, 1994.

MỤC LỤC

Chương 1	Bổ túc về cơ học vật rắn và các phương pháp tính trong cơ học	3
§1.1.	CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG	3
§1.2.	CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CƠ VẬT RẮN BIẾN DẠNG, BÀI TOÁN ĐÀN HỒI	15
§1.3.	CÁC NGUYÊN LÝ NĂNG LƯỢNG (CÁC NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN)	26
Chương 2	Cơ sở và các bước phân tích chung của phương pháp phần tử hữu hạn	33
§2-1.	Khái niệm về phương pháp phần tử hữu hạn.	33
§2-2.	Trình tự phân tích bài toán theo phương pháp PTHH	34
§2-3.	Hàm xấp xỉ – đa thức xấp xỉ – phép nội suy	35
§2-4.	Các phương trình cơ bản.	45
Chương 3	Tính toán hệ thanh	55
§3-1.	HỆ THANH DÀN.	55
§3-2.	KHUNG PHẪNG	70
§3-3.	KHUNG KHÔNG GIAN.	83
Chương 4	Bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi	92
§4.1.	CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN PHẪNG CỦA LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI	92
§4.2.	BÀI TOÁN PHẪNG VỚI PHẦN TỬ DẠNG TAM GIÁC	94
§4.3.	PHẦN TỬ CHỮ NHẬT	108
Chương 5	Phần tử bậc cao và phần tử đẳng tham số	119
§5-1.	HỆ TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN CỦA CÁC LOẠI PHẦN TỬ	120
§5-2.	PHẦN TỬ MỘT CHIỀU BẬC CAO	126
§5.3.	PHẦN TỬ TAM GIÁC BẬC CAO TRONG HỆ TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN	133

§5.4. PHẦN TỬ 3 CHIỀU - KHỐI TỬ DIỆN	139
§5.5. PHẦN TỬ HAI CHIỀU DẠNG TỬ GIÁC	140
§5.6. PHẦN TỬ ĐẲNG THAM SỐ	149
Chương 6 Tấm chịu uốn	167
§6.1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA TẤM CHỊU UỐN.	167
§6.2. PHẦN TỬ TẤM KHÔNG TƯƠNG THÍCH DẠNG TAM GIÁC	175
§6.3. PHẦN TỬ ĐẲNG THAM SỐ DẠNG TỬ GIÁC BỐN NÚT	185
Chương 7 Phần tử ba chiều	192
§7.1. PHẦN TỬ TỬ DIỆN	193
§7.2. PHẦN TỬ LỤC DIỆN	197
Chương 8 Bài toán động lực học kết cấu	206
§8.1 PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC HỌC KẾT CẤU	206
§8.2 MA TRẬN KHỐI LƯỢNG TƯƠNG THÍCH VÀ MA TRẬN KHỐI LƯỢNG TẬP TRUNG.	209
§8.3 MA TRẬN KHỐI LƯỢNG TƯƠNG THÍCH TRONG HỆ TỌA ĐỘ TỔNG THỂ	210
§8.4 DAO ĐỘNG TỰ DO - BÀI TOÁN TRỊ RIÊNG XÁC ĐỊNH TẦN SỐ DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA KẾT CẤU	219
TÀI LIỆU THAM KHẢO	221



000000

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

CHU QUỐC THẮNG

Chịu trách nhiệm xuất bản : PGS. PTS. TÔ ĐĂNG HẢI

Biên tập :

ĐẶNG NGỌC

Sửa bản in :

HUYỀN LƯƠNG

In 1.000 cuốn 19 x 27 cm tại Nhà in Trường Kỹ thuật nghiệp vụ công nghiệp. Số giấy phép xuất bản 1-98 - 17/1/97. In xong và nộp lưu chiểu tháng 6-1997.

30000