BÀI GIẢNG PHƯƠNG PHÁP SỐ

Giới thiệu môn học

Phương pháp số (Numerical methods) là một khoa học nghiên cứu cách giải gần đúng các phương trình và cách tính xấp xỉ các toán tử để đưa ra lời giải gần đúng cho các bài toán cho trước. Nói cách khác, phương pháp số xem xét cách giải các bài toán dựa trên dữ liệu số cho trước và đưa ra kết quả cũng bằng số.

Phương pháp số đã có nhiều bước tiến mạnh mẽ trong khoảng nửa thế kỷ trở lại đây cùng với sự phát triển mạnh mẽ của Tin học. Ngày nay, phạm vi ứng dụng của Phương pháp số ngày càng được mở rộng, không chỉ trong Vật lý, Kinh tế, Tài chính… mà trong cả Thủy lợi, đặc biệt là phục vụ cho tính toán công trình.

Mục đích của môn học Phương pháp số trong chương trình đào tạo cho Khoa Công trình – Trường Đại học Thủy lợi là cung cấp cho sinh viên những khái niệm và kiến thức nền tảng của phương pháp số, một công cụ rất quan trọng cho công việc tính toán kết cấu công trình.

Nội dung môn học gồm 5 chương

Chương 1: Sai số và xấp xỉ
Chương 2: Tính gần đúng nghiệm của một phương trình
Chương 3: Tính gần đúng nghiệm của một hệ phương trình đại số tuyến tính
Chương 4: Tính gần đúng đạo hàm và tích phân xác định
Chương 5: Giải gần đúng phương trình vi phân thường và phương trình đạo hàm riêng

Tài liệu chính thức:

[1] Tạ Văn Đĩnh: Phương pháp tính dùng cho các trường Đại học kỹ thuật NXB giáo dục 1994 (Thư viện trường).

[2] Lê Trọng Vinh: *Giáo trình Giải tích số,* Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật, 2007.

Tài liệu tham khảo

[1] B.S. Grewal Numerical Methods in Engineering & Science

Khanna Publihishers, Second Preprint 2000 (Trung tâm tư liệu quốc gia).

[2] Giải tích số; Trần Anh Bảo, Nguyễn Văn Khải, Phạm VănKiều, Ngô Xuân Sơn; NXB ĐHSP-2007.

Chương 1(Buổi 1)

SAI SỐ VÀ XẤP XỈ

I. Một số khái niệm mở đầu

I.1. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Nói chung, giá trị của các đại lượng dùng trong tính toán không được biết một cách chính xác, chẳng hạn giá trị của các đại lượng nhận được bằng phép đo, đếm… Nói cách khác, trong tính toán chúng ta phải làm việc với các giá trị gần đúng.

Định nghĩa I.1.1. *Ta gọi a là số gần đúng của a^* nếu như a không sai khác a^* nhiều. Ký hiệu $a \approx a^*$.*

Định nghĩa I.1.2. *Hiệu số $\Delta = a^* - a$ gọi là sai số thực sự của số gần đúng a. Nếu $\Delta > 0$ thì a được gọi là số gần đúng thiếu, nếu $\Delta < 0$ thì a được gọi là số gần đúng thừa của a^*.*

Thông thường, vì a^* không thể biết, nên cũng không rõ Δ, tuy nhiên thường là có thể tìm được số $\Delta a > 0$ thỏa mãn điều kiện

$$|a^* - a| \le \Delta a \qquad (1)$$

Định nghĩa I.1.3. *Ta gọi Δa thỏa mãn (1) là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.*

Từ (1) ta có

$$a - \Delta a \le a^* \le a + \Delta a \quad (2)$$

Một số gần đúng a của số đúng a^* với sai số tuyệt đối Δa được viết đơn giản là $a^* = a \pm \Delta a$ (3)

Định nghĩa I.1.4. *Cho số gần đúng a của số đúng a^* với sai số tuyệt đối Δa và giả sử $a^* \neq 0$. Ta gọi sai số tương đối của số gần đúng a với số đúng a^* là một số, ký hiệu là δ_a, được xác định bởi*

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|a^*|} \qquad (4)$$

Tuy nhiên vì số đúng a^* chưa biết, cho nên đại lượng δ_a xác định bởi (4) chỉ có ý nghĩa lý thuyết, để đảm bảo tương đối chính xác người ta thường tính toán δ_a theo công thức sau (với điều kiện $a \neq 0$)

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|a|} \qquad (5)$$

Ví dụ I.1.1. Cho $a^* = \pi, a = 3.14$. Do $3.14 < a^* < 3.15 = 3.14 + 0.01$ nên ta có thể lấy $\Delta a = 0.01$. Mặt khác $3.14 < a^* < 3.142 = 3.14 + 0.002$ nên có thể coi $\Delta a = 0.002$. v.v…Tức là có thể có nhiều sai số cho phép lấy số gần đúng của số π

Ví dụ I.1.2. Xét hai đoạn thẳng AB có độ dài $a = 10m \pm 0.01m$ và CD có độ dài $b = 1m \pm 0.01m$. Như vậy ta có $\Delta a = \Delta b = 0.01m$ nhưng

$$\delta_a = \frac{0.01}{10} = 10^{-3} \quad , \quad \delta_b = \frac{0.01}{1} = 10^{-2}$$

Như vậy phép đo đoạn thẳng AB và CD cùng có sai số tuyệt đối như nhau nhưng sai số tương đối của a nhỏ hơn sai số tương đối của b, từ đó phép đo đoạn thẳng AB là chính xác hơn phép đo đoạn thẳng CD.

Nhận xét:

- Sai số tuyệt đối và sai số tương đối không duy nhất.
- Độ chính xác của một phép đo phản ánh qua sai số tương đối.

I.2. Phép làm tròn số và sai số của phép làm tròn số

Trong mục này ta luôn qui ước các số được viết dưới dạng thập phân. Một số thập phân $a \neq 0$ có dạng tổng quát

$$a = \pm\left(a_p 10^p + a_{p-1}10^{p-1} + \cdots + a_{p-s}10^{p-s}\right) \qquad (6)$$

Trong đó $a_i, s \in N, p \in Z, 0 \le a_i \le 9, a_p > 0$, với mỗi a_i là một chữ số của a, chỉ số i xác định hàng của chữ số ấy. Nếu $p - s \ge 0$ thì a là số nguyên, nếu $p - s = -m$ $(m > 0)$ thì số a có phần lẻ gồm m chữ số, nếu $s = +\infty$ thì a là số thập phân vô hạn. Làm tròn số a đến hàng thứ j là bỏ đi các chữ số có hàng thứ k, với $k \le j - 1$ để được một số $\bar{a}$ gọn hơn a và gần đúng nhất với a.

Qui tắc làm tròn số

Xét số a ở dạng (6) và ta giữ lại đến hàng thứ j, phần bỏ đi được gọi là μ, lúc đó

$$\bar{a} = \pm\left(a_p 10^p + \cdots + a_{j+1}10^{j+1} + \bar{a}_j 10^j\right)$$

Với

$$\bar{a}_j = \begin{cases} a_j \ \ nếu\ \ 0 \le \mu < \frac{1}{2}10^j \ \ \ hoặc\ \mu = \frac{1}{2}10^j \ \ mà\ a_j chẵn \\ a_j + 1 \ \ nếu\ \frac{1}{2}10^j < \mu < 10^j \ \ \ hoặc\ \mu = \frac{1}{2}10^j \ \ mà\ a_j \ lẻ \end{cases}$$

Sai số của phép làm tròn số a ký hiệu là Γa được xác định bởi

$$|a - \bar{a}| = \Gamma a$$

Rõ ràng $\Gamma a \le \frac{1}{2}10^j$. Dễ thấy $|a^* - \bar{a}| \le |a^* - a| + |a - \bar{a}| \le \Delta a + \Gamma a$

Như vậy khi làm tròn số thì sai số tuyệt đối tăng thêm Γa.

Ví dụ I.2.1. Xét $a = 314.149$. Hãy thực hiện phép làm tròn số lần lượt đến hàng thứ $-2, -1, 0, 1$.

Lời giải

Ta có $a = 3.10^2 + 1.10^1 + 4.10^0 + 1.10^{-1} + 4.10^{-2} + 9.10^{-3}$. Làm tròn số a lần lượt, ta thu được kết quả sau

$$314.15 = 3.10^2 + 1.10^1 + 4.10^0 + 1.10^{-1} + 5.10^{-2}$$
$$314.2 = 3.10^2 + 1.10^1 + 4.10^0 + 2.10^{-1}$$
$$314 = 3.10^2 + 1.10^1 + 4.10^0$$
$$310 = 3.10^2 + 1.10^1$$

Tuy nhiên để ý rằng nếu làm tròn ngay số a đến hàng thứ -1 thì có kết quả là 314.1 không trùng với kết quả trên có được bằng cách làm tròn một cách lần lượt.

I.3. Chữ số chắc

Ta vẫn xét số a viết dưới dạng thập phân (6), khi đó có

Định nghĩa I.3.1: *Chữ số a_j trong biểu diễn dạng (6) được gọi là chắc nếu*

$$\Delta a \le \frac{1}{2}.10^j \qquad (7)$$

Ví dụ I.3.1: Cho $a = 65.8274$ với $\Delta a = 0.0043$ thì các chữ số $6, 5, 8, 2$ là các chữ số chắc, còn 7,4 là các chữ số không chắc.

Nhận xét rằng nếu a_s chắc thì tất cả các chữ số có nghĩa đứng ở bên trái nó cũng chắc và nếu a_s không chắc thì tất cả các chữ số có nghĩa ở bên phải nó cũng không chắc.

I.4. Cách viết số gần đúng

Cách thứ nhất: Viết kèm theo sai số tuyệt đối $a \pm \Delta a$. Ví dụ $a^* = 3.98 \pm 0.001$ thì hiểu là số gần đúng của a^* là 3.98 với sai số tuyệt đối là $\Delta a = 0.001$

Cách thứ hai: Viết kèm theo sai số tương đối $a \pm \delta_a$. Ví dụ $a = 3.98 \pm 1\%$ thì hiểu là số gần đúng của a là 3.98 với sai số tương đối là $\delta_a = 1\%$

Cách thứ ba: Số gần đúng không được viết kèm theo sai số tuyệt đối cũng như sai số tương đối, khi đó cần hiểu là tất cả các chữ số của số gần đúng đều là chữ số chắc. Ví dụ $a = 2.718$ thì chữ số 8 là chắc và hiển nhiên tất cả các chữ số đứng trước đều chắc, do đó $\Delta a \le 10^{-3}$.

- ✓ Cách thứ 3 thường được dùng trong các bảng số thông dụng như bảng logarit, bảng giá trị các hàm lượng giác, bảng giá trị các hàm số trong thống kê toán học…

II. Sai số

II.1. Sai số của các số liệu ban đầu

Trong quá trình giải các bài toán thực tế ta thường phải dùng các số liệu là kết quả của các phép đo lường, thí nghiệm…Mà trong quá trình đó, các yếu tố như thể trạng, tâm lý của người phụ trách thí nghiệm đo, đếm số liệu, độ chính xác có hạn của thiết bị thí nghiệm và thiết bị đo, đếm, tác động của môi trường xung quanh như độ ẩm, áp suất, tốc độ gió… tất cả đều có thể ảnh hưởng đến kết quả thí nghiệm.

Để đơn giản vấn đề và cũng đảm bảo độ chính xác, bằng lý thuyết xác suất ta có kết luận sau:

Để xác định một số liệu a^*, người ta làm m lần phép thử và thu được các kết quả tương ứng là $a_1, a_2, \dots a_m$. Khi đó có thể lấy

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m}$$

Là giá trị gần đúng của a^* với sai số tuyệt đối là

$$\Delta a = \left(\frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^{m} (a_i - a)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

II.2. Sai số tính toán

II.2.1. Mở đầu

Ta xét bài toán tổng quát sau:

- ✓ Xét hàm số u của hai biến số x, y: $u = f(x, y)$

Giả sử x là xấp xỉ của giá trị đúng x^*, y là xấp xỉ của giá trị đúng y^* và ta coi u là xấp xỉ của giá trị đúng $u^* = f(x^*, y^*)$

Cho biết sai số về x và y, hãy lập công thức tính sai số về u.

Ta thấy nếu hàm u khả vi liên tục thì

$$\Delta u = |u - u^*| = |f(x, y) - f(x^*, y^*)| \le |f'_x| . |x - x^*| + |f'_y| . |y - y^*|$$

Với f'_x, f'_y là đạo hàm theo x, y tại điểm trung gian.

Vì u khả vi liên tục và Δx, Δy khá nhỏ nên ta có thể lấy

$$\Delta u = |f'_x(x, y)| . \Delta x + |f'_y(x, y)| . \Delta y$$

Do đó

$$\delta_u = \frac{\Delta u}{|u|} = |\frac{\partial}{\partial x} \ln f| . \Delta x + |\frac{\partial}{\partial y} \ln f| . \Delta y$$

- ✓ Ngoài ta còn có kết quả đối với hàm n biến $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và ta có

$$\Delta u = |f'_{x_1}(x_1, \dots, x_n)| . \Delta x_1 + \cdots + |f'_{x_n}(x_1, \dots, x_n)| . \Delta x_n$$

$$\delta_u = \frac{\Delta u}{|u|} = |\frac{\partial}{\partial x_1} \ln f| . \Delta x_1 + \cdots + |\frac{\partial}{\partial x_n} \ln f| . \Delta x_n$$

II.2.2. Sai số của tổng

Cho $u = x + y$ thì $u'_x = u'_y = 1$ nên $\Delta u = \Delta x + \Delta y$

Ta có qui tắc

Sai số tuyệt đối của một tổng bằng tổng của các sai số tuyệt đối của các số hạng

Chú ý: Xét trường hợp $u = x - y$ với x và y cùng dấu. Lúc đó

$$\delta_u = \frac{\Delta u}{|u|} = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x - y|}$$

Do đó nếu $|x - y|$ rất bé thì sai số tương đối sẽ rất lớn. Do đó trong tính toán người ta thường tìm cách tránh phải trừ các số gần nhau.

II.2.3. Sai số của tích

Cho $u = x.y$ thì $u'_x = y,\ u'_y = x$ nên $\Delta u = |y|.\Delta x + |x|.\Delta y$

Và do đó

$$\delta_u = \frac{\Delta u}{|u|} = \frac{|y|.\Delta x + |x|.\Delta y}{|x.y|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}$$

Tức là $\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y$

Vậy ta có qui tắc

Sai số tương đối của một tích bằng tổng của các sai số tương đối của các thừa số trong tích

II.3. Sai số phương pháp

Khi giải gần đúng một bài toán phức tạp ta phải thay bài toán đã cho bằng một bài toán đơn giản hơn có thể giải được thông qua việc thực hiện các phép tính thông thường hoặc trên máy tính điện tử. Phương pháp thay bài toán phức tạp bởi bài toán đơn giản như thế gọi là phương pháp gần đúng. Sai số do phương pháp gần đúng tạo ra gọi là sai số phương pháp.

Nhận xét: Khi giải bài toán đơn giản hơn ta phải thực hiện các phép tính thông thường, ta luôn luôn phải qui tròn các kết quả trung gian. Sai số tạo ra bởi tất cả các lần qui tròn như vậy gọi là sai số tính toán. Như vậy, khi giải một bài toán bằng phương pháp gần đúng thì sai số cuối cùng là tổng hợp của hai loại sai số phương pháp và sai số tính toán.

Ví dụ1:

a. Tính tổng $A = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3}$

b. Tính tổng

$$B = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^3} + \cdots$$

Với sai số tuyệt đối không vượt quá 5.10^{-3}

Giải:

a. A là tổng của 6 phần tử. Ta có thể tính trực tiếp A mà không phải thay nó bằng một tổng đơn giản hơn. Vì vậy ở đây không có sai số phương pháp. Để tính A ta hãy thực hiện các phép chia đến ba chữ số lẻ thập phân và đánh giá các sai số qui tròn tương ứng

$$\frac{1}{1^3}=\frac{1}{1}=1.000 \text{ với } \Delta_1=0$$
$$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}=0.125 \text{ với } \Delta_2=0$$
$$\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}=0.037 \text{ với } \Delta_3=1.10^{-4}$$
$$\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}=0.016 \text{ với } \Delta_4=4.10^{-4}$$
$$\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}=0.008 \text{ với } \Delta_5=0$$
$$\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}=0.005 \text{ với } \Delta_6=4.10^{-4}$$

Vậy

$$A\approx a=1.000-0.125+0.037-0.016+0.008-0.005=0.899$$
$$|A-a|\le\Delta_1+\cdots+\Delta_6=9.10^{-4}$$

Như thế $a=0.899$ là giá trị gần đúng của A với sai số tính toán 9.10^{-4}.

b. Vế phải của B là một chuỗi đan dấu hội tụ, nhưng là tổng vô hạn, nên ta không thể thực hiện phép cộng dồn tất cả các số hạng của chuỗi. Do đó để tính B ta phải sử dụng một phương pháp gần đúng, cụ thể là thay B bởi tổng của n số hạng đầu

$$B_n=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3}$$

Bài toán tính B_n đơn giản hơn bài toán tính B. Lúc đó $|B-B_n|$ là sai số phương pháp, và số n được chọn sao cho sai số phương pháp ấy cộng với sai số tính toán vẫn còn nhỏ hơn 5.10^{-3}. Ta có

$$|B-B_n|=|\frac{1}{(n+1)^3}-\frac{1}{(n+2)^3}+\cdots|<\frac{1}{(n+1)^3}$$

Với $n=6$ ta thấy

$$|B-B_6|<\frac{1}{7^3}=\frac{1}{343}<3.10^{-3}$$

Chú ý rằng $B_6=A=0.899\pm9.10^{-4}$

Vậy có thể lấy $B\approx0.899$ với sai số tuyệt đối

$$|B-0.899|\le|B-B_6|+|A-0.899|\le3.10^{-3}+9.10^{-4}<4.10^{-3}$$

Vậy $B=0.899\pm4.10^{-3}$

Ví dụ 2: Cho tổng $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Hãy tính tổng S với sai số không vượt quá 10^{-2} .

III. Bài toán ngược của sai số

Giả sử rằng cần tính $y=f(x_1,\dots,x_n)$ với sai số $\Delta_y\le a$. Hãy xác định các Δ_{x_i}. Theo biểu thức tổng quát của sai số tính toán, ta phải có

$$\Delta_y=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|.\Delta x_i\le a$$

Giả sử rằng $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|.\Delta x_i=const,\ i=1\dots n \quad (*)$

Khi đó nếu $\Delta x_i \le \frac{a}{n|f'_{x_i}|}$

Thì bất đẳng thức $\Delta y \le a$ được thỏa mãn.

Điều kiện (*) thường được gọi là nguyên lý ảnh hưởng đều.

Ví dụ: Một hình trụ có chiều cao $h = 3m$, bán kính đáy $R = 2m$, hỏi rằng lấy $\Delta h, \Delta R, \pi$ như thế nào thì thể tích V của hình trụ được chính xác đến $0.1m^3$

Giải: Ta có $V = \pi R^2 h$, nên

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 h \ , \ \frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi Rh \ , \ \frac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2$$

Từ đó nếu ta lấy $\Delta\pi = \frac{0.1}{3.4.4} < 0.003$, $\Delta R = \frac{0.1}{3.6.2\pi} < 0.001$, $\Delta h = \frac{0.1}{3.\pi.4} < 0.003$

Thì yêu cầu bài toán được thỏa mãn. Lúc đó cần có R, h với 3 chữ số chắc.

Lấy số π với 3 chữ số chắc thì $V = 37.7m^3$ chính xác đến $0.01m^3$

Chương 2(Buổi 2+3)

TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH

I. Mở đầu

Tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ (1), trong đó $f(x)$ là một hàm số đại số hoặc siêu việt bất kỳ, là một bài toán thường gặp trong kỹ thuật cũng như trong lý thuyết.

Phương trình trên, trừ một vài trường hợp đặc biệt, chẳng hạn như phương trình đại số bậc 1, 2, 3, 4 có công thức tính nghiệm cụ thể, còn nói chung là không có một công thức tính đúng nghiệm. Mặt khác, các hệ số của $f(x)$ trong nhiều trường hợp là những số gần đúng, cho nên vấn đề giải đúng (1) cũng không thật sự cần thiết. Vì vậy, việc tìm những phương pháp giải gần đúng phương trình đại số và siêu việt cũng như việc đánh giá độ chính xác của nghiệm gần đúng có một vai trò quan trọng. Trong chương này, chúng ta xét bài toán tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (1) với giả thiết $f(x)$ là hàm số thực xác định và liên tục trên một khoảng hữu hạn hoặc vô hạn nào đó. Việc tính giá trị gần đúng của nghiệm thực của (1) gồm hai bước sau:

Bước 1: Tìm khoảng (a, b) đủ nhỏ sao cho phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x^* \in (a, b)$. Bước này được gọi là tách nghiệm.

Bước 2: Chính xác hóa nghiệm đến mức độ cần thiết theo một phương pháp giải gần đúng. Bước này được gọi là kiện toàn nghiệm.

Cơ sở để tách nghiệm là những khẳng định sau, khá quen thuộc trong giải tích, mà phép chứng minh là đơn giản

Định lý I.1.

a. *Giả sử $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) \le 0$. Khi đó tồn tại ít nhất một nghiệm $x^* \in (a, b)$ của phương trình (1).*
b. *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a).f(b) \le 0$, hơn nữa, hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục, không đổi dấu trên đoạn $[a, b]$ thì nghiệm x^* nói trên là duy nhất.*

Bước tách nghiệm thường được tiến hành bằng phương pháp chia đôi hoặc phương pháp hình học.

Trường hợp $f(x)$ là đa thức đại số, $\deg f(x) = n$, khi đó phương trình (1) có không quá n nghiệm, vì vậy nếu như có được $n + 1$ điểm đổi dấu thì bước tách nghiệm là xong.

Sau khi đã tách được nghiệm, thì công việc tiếp theo là kiện toàn nghiệm. Để thực hiện bước này, chúng ta có thể dùng một trong các phương pháp được mô tả ở các mục sau.

II. Một số phương pháp giải gần đúng nghiệm của phương trình $f(x) = 0$

II.1. Phương pháp chia đôi

II.1.1. Nội dung phương pháp

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x^* trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Bây giờ lấy $c = \frac{a+b}{2}$ và tính $f(c)$, nếu $f(c) = 0$ thì có ngay $x^* = c$ là nghiệm đúng của phương trình (1).

Nếu $f(c) \neq 0$, thì ta gọi $[a_1, b_1]$ là một trong hai đoạn $[a, c], [c, b]$ mà ở đó $f(a_1).f(b_1) < 0$. Lại lấy $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ và tính $f(c_1)$, nếu $f(c_1) = 0$ thì quá trình kết thúc, $x^* = c_1$, nếu không ta lại tiếp tục quá trình này, và như vậy ta có dãy đoạn $[a_n, b_n], n \in N^*$.

II.1.2. Sự hội tụ của phương pháp

Nếu ta thực hiện liên tiếp thao tác chia đôi đoạn $[a, b]$ như trên, thì hoặc là tại bước thứ n, ta có $f(c_n) = 0$, lúc đó $x^* = c_n$ (trường hợp này ít xảy ra), hoặc là ta nhận được dãy vô hạn các đoạn nhỏ $\Delta_n = [a_n, b_n]$ đóng lồng nhau, thắt lại với $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a), \forall n \in N^* (2)$

Theo cách dựng ta có $f(a_n).f(b_n) < 0$ (3)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x^*$$

Hơn nữa khi $n \to \infty$ thì từ (3) có $[f(x^*)]^2 \leq 0$, vậy x^* là nghiệm của phương trình (1).

II.1.3. Sai số

Nói chung, khi dừng lại ở bước n thì ta có

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

Vậy ta có thể lấy nghiệm gần đúng là

$$c = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Sai số mắc phải khi đó là

$$\frac{1}{2^{n+1}}(b - a)$$

Nhận xét: Phương pháp chia đôi có ưu điểm là đơn giản, dễ lập trình trên máy tính tuy nhiên tốc độ hội tụ chậm.

Ví dụ 1: Tính nghiệm gần đúng của phương trình sau nhờ phương pháp chia đôi trên $[1, 2]$: $x^3 - x - 1 = 0$

Giải:

Gọi $f(x) = x^3 - x - 1$, áp dụng liên tiếp phương pháp chia đôi ta có kết quả ở bảng sau:

n	a_n	b_n	$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(c_n)$	$b_n - a_n$
0	1	2	1.5	0.875	1
1	1	1.5	1.25	-0.29688	0.5
2	1.25	1.5	1.375	0.22461	0.25
3	1.25	1.375	1.3125	-0.05151	0.125

4	1.3125	1.375	1.34375	0.08261	0.0625
5	1.3125	1.34375	1.32813	0.01458	0.03125
6	1.3125	1.32813	1.32032		0.01562

Dừng lại ở bước thứ 6, lấy nghiệm gần đúng là $x = x_6 = 1.32032$, sai số 0.008

Ví dụ 2: Giải gần đúng các nghiệm của phương trình sau trên $\mathbb{R}$ bằng phương pháp chia đôi: $x^9 + x - 10 = 0$ tính đến lần lặp thứ 4 và đánh giá sai số mắc phải.

II.2. Phương pháp lặp đơn

II.2.1. Nội dung phương pháp

Để giải phương trình (1), ta đưa nó về dạng $x = \varphi(x) \quad (4)$

Với một xấp xỉ ban đầu $x_0 \in [a, b]$ cho trước, ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ nhờ hệ thức $x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k \geq 0 \quad (5)$

Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến nghiệm x^* của (5) thì ta nói rằng đã giải gần đúng phương trình (1) nhờ phương pháp lặp đơn.

II.2.2. Sự hội tụ của phương pháp

Định nghĩa II.2.2.1. *Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x^* khi $n \to \infty$ thì ta nói phương pháp lặp (5) hội tụ*

Khi phương pháp lặp hội tụ thì x_n càng gần x^* nếu n càng lớn. Cho nên ta có thể xem x_n với n xác định là giá trị gần đúng của x^*. Nếu phương pháp lặp không hội tụ thì x_n có thể rất xa x^*. Vì vậy chỉ có phương pháp lặp hội tụ mới có giá trị. Đề kiểm tra xem một phương pháp lặp có hội tụ hay không ta có định lý sau:

Định lý II.2.2.1. Giả sử $\varphi \in C^1[a, b]$ sao cho

a. $\forall x \in [a, b] \quad |\varphi'(x)| \leq q < 1$
b. $\forall x \in [a, b]\ \ \varphi(x) \in [a, b]$

Khi đó phương pháp lặp (5) hội tụ.

Chứng minh

Trước hết vì x^* là nghiệm của (4) nên có $x^* = \varphi(x^*)$
Do đó $x^* - x_n = \varphi(x^*) - \varphi(x_{n-1})$
Áp dụng công thức Lagrange vào vế phải đẳng thức trên ta có

$$x^* - x_n = \varphi'(c)(x^* - x_{n-1})$$

Theo giả thiết a) ta có $|\varphi'(c)| \leq q < 1$. Do đó

$$|x^* - x_n| = |\varphi'(c)|.|x^* - x_{n-1}| \leq q|x^* - x_{n-1}|$$

Bất đẳng thức trên đúng cho mọi n. Áp dụng bất đẳng thức liên tiếp n lần ta có

$$|x^* - x_n| \leq q^n|x^* - x_0|$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Chú ý 1:

Nếu hàm $\varphi(x)$ đã thỏa mãn giả thiết a) thì sự thỏa mãn giả thiết b) phụ thuộc việc chọn x_0.

- ✓ *Nếu $\varphi'(x) > 0$ thì ta có thể chọn $x_0 \in [a, b]$ tùy ý.*
- ✓ *Nếu $\varphi'(x) < 0$ thì phải chọn x_0 theo qui tắc*

$$x_0 = a \text{ khi } a < x^* < \frac{a+b}{2}$$

$$x_0 = b \; khi \; \frac{a+b}{2} < x^* < b$$

Muốn biết x^* thuộc khoảng nào thì ta chỉ việc tính $f(\frac{a+b}{2})$ rồi so sánh dấu của nó với dấu của $f(a) \; hoặc \; f(b)$

Kết quả này có thể suy ra từ công thức $x^* - x_n = \varphi(x^*) - \varphi(x_{n-1})$

II.2.3. Đánh giá sai số

Giả sử ta coi x_n là giá trị gần đúng của x^*. Khi đó sử dụng nhận xét $|x^* - x_0| < b - a$ ta có đánh giá sai số

$$|x^* - x_n| \le q^n(b-a)$$

Tuy vậy công thức này thường cho sai số quá lớn so với thực tế. Sau đây ta sẽ chứng minh một công thức đánh giá sai số sát hơn.

Ta có

$$|x^* - x_n| \le q|x^* - x_{n-1}| \le q(|x^* - x_n| + |x_n - x_{n-1}|)$$

Hay

$$(1-q)|x^* - x_n| \le q|x_n - x_{n-1}|$$

Vì $0 \le q < 1$ nên $1 - q > 0$. Do đó ta có công thức đánh giá sai số

$$|x^* - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^3 + x - 1000 = 0$

a) Tính gần đúng tất cả các nghiệm của phương trình trên sao cho sai số không vượt quá 10^{-9}
b) Tính gần đúng tất cả các nghiệm của phương trình trên đến lần lặp thứ 4 và đánh giá sai số mắc phải.
c) Tính gần đúng tất cả các nghiệm sao cho nghiệm gần đúng có 7 chữ số chắc phần thập phân.

Giải:

*) Xét $f(x) = x^3 + x - 1000$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ cho nên nếu phương trình trên có nghiệm thì sẽ co nghiệm duy nhất trên $\mathbb{R}$.

Dễ thấy $f(9).f(10) < 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x^* \in (9, 10)$. Có ít nhất là ba cách đưa phương trình về dạng (4)

Cách 1: $x = \varphi_1(x) = 1000 - x^3$

Cách 2: $x = \varphi_2(x) = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x}$

Cách 3: $x = \varphi_3(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$

Ta lần lượt xét từng trường hợp

$$\varphi_1'(x) = -3x^2 \, , \max_{[9;10]}|\varphi_1'(x)| = 300 \gg 1$$

$$\varphi_2'(x) = -2000x^{-3} + x^{-2} \quad |\varphi_2'(10)| = 2{,}01 \Rightarrow \max_{[9;10]}|\varphi_2'(x)| \geq 2{,}01 > 1$$

$$\varphi_3'(x) = -\frac{1}{3}(1000 - x)^{-\frac{2}{3}}\ , \varphi_3''(x) < 0\ suy\ ra\ \max_{[9;10]}|\varphi_3'(x)| = |\varphi_3'(10)| = \frac{1}{3(990)^{2/3}} = q < 1$$

Rõ ràng phép lặp (5) cho trường hợp φ_1, φ_2 là phân kỳ còn cho φ_3 hội tụ khá nhanh do q khá nhỏ.

*) Lấy $x_0 = 10\ vì\ \varphi_3'(x) < 0\ mọi\ x \in [9;10]$ và $f(9.5)f(10) < 0$.

*) Công thức lặp (*) $\begin{cases} x_0 = 10 \\ x_{n+1} = \sqrt[3]{1000 - x_n} \end{cases} \forall n \geq 0$

a) Sai số $|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$. Theo yêu cầu ta phải tìm x_n sao cho
$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q}10^{-9} = 2.97 \times 10^{-7}$

Tính toán trên máy tính ta được bảng

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	10	
1	9.966554	0.033556
2	9.966667	1.13×10^{-4}
3	9.9666668	2×10^{-7}

Vậy ta có $x^* \approx x_3 = 9.9666668$

b) Ta sẽ lập bảng tính toán dùng công thức lặp (*) và cho ra bảng kết quả dạng như ở câu a) và tính đến $n = 4$ được $x_4 = 9.966666791$ và có sai số mắc phải

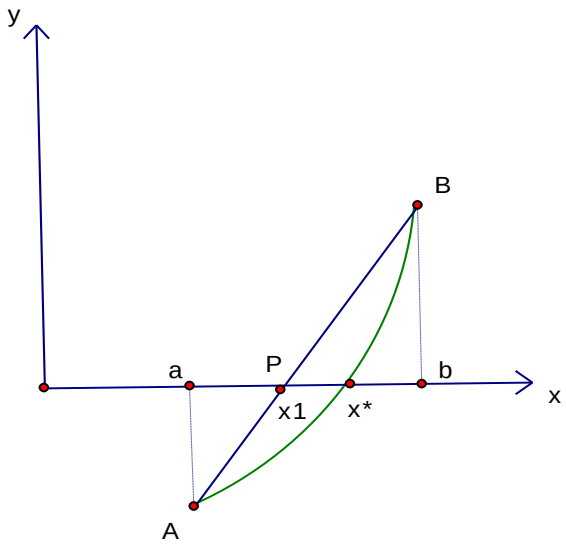
$$|x_4 - x^*| \leq \frac{q}{1-q}|x_4 - x_3| \leq \frac{1}{299} \times 9.5 \times 10^{-9} = 3.2 \times 10^{-11}$$

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^9 + x - 10 = 0$

a) Tìm nghiệm gần đúng của nghiệm nhỏ nhất của phương trình trên theo phương pháp lặp đến lần lặp thứ 4 và đánh giá sai số mắc phải.
b) Tìm nghiệm gần đúng của nghiệm nhỏ nhất của phương trình trên theo phương pháp lặp sao cho sai số không vượt quá 10^{-5}.

II.3. Phương pháp dây cung

Tư tưởng của phương pháp dây cung là thay cung đồ thị AB của hàm $y = f(x)$ bởi dây cung AB rồi lấy hoành độ x_1 của giao điểm P của dây cung với trục hoành làm giá trị gần đúng của nghiệm x^*. Ta minh họa phương pháp này bởi hình sau:



Phương trình dây cung AB là

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

Tại giao điểm P ta có $y=0, x=x_1$ nên có

$$\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1-a}{b-a}$$

Từ đó suy ra

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$$

Sau khi tính được x_1 ta có thế xét khoảng chứa nghiệm mới $[a,x_1]$ hoặc $[x_1,b]$ rồi tiếp tục áp dụng phương pháp dây cung. Cứ thế tiếp tục ta sẽ được các giá trị x_2, x_3, ... ngày càng gần x^*

Tổng quát:

Giả sử rằng hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(a).f(b)<0$. Giả sử rằng $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 liên tục và ta có $f''(x)>0$ trên $[a,b]$ (nếu như $f''(x)<0$ thì ta chuyển (1) về dạng $-f(x)=0$). Khi đó đồ thị $y=f(x)$ nằm phía dưới dây cung AB với $A\big(a,f(a)\big), B\big(b,f(b)\big)$.

- *Trường hợp 1.*Nếu như $f(a)>0$, ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ theo hệ thức

$$\begin{cases} x_0=b \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}(x_n-a) \end{cases} \quad (6)$$

Khi đó dãy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm, bị chặn dưới và hội tụ đến x^*.

- *Trường hợp 2.*Nếu như $f(a)<0$, ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ theo hệ thức

$$\begin{cases} x_0=a \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n) \end{cases} \quad (7)$$

Khi đó dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng, bị chặn trên và hội tụ đến x^*.

Giả sử rằng hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và dãy $\{x_n\} \subset [a, b]$, $f'(x)$ giữ nguyên một dấu và ngoài ra có

$$0 < m \le |f'(x)| \le M < +\infty$$

Khi đó có thể chứng minh ước lượng sai số sau:

$$|x_n - x^*| \le \frac{M-m}{m}|x_n - x_{n-1}|$$

Ví dụ1 :

Tìm nghiệm dương của phương trình sau đây nhờ phương pháp dây cung với độ chính xác đến 0.0002

$$x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$$

Giải:

*) Đặt $f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2$.

*) Dùng phương pháp tách nghiệm bằng cách khảo sát hàm f và dựa vào bảng biến thiên để khẳng định nghiệm dương duy nhất trên $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ (Hãy tự khảo sát và yêu cầu viết rõ ra tại sao?)

Mà có $f(1) = -0.6 < 0, f(1.5) = 1.425 > 0$ nên có $x^* \in (1; 1.5)$,

*) Kiểm tra phương pháp: Có $f'(x) = 3x^2 - 0.4x - 0.2,\ f''(x) = 6x - 0.4 > 0$ trên $[1, 1.5]$.

Vì $f(1) < 0$ nên ta áp dụng (7) ta có công thức lặp:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(1.5) - f(x_n)}(1.5 - x_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 0.2x_n^2 - 0.2x_n - 1.2}{2.625 - x_n^3 + 0.2x_n^2 + 0.2x_n}(1.5 - x_n) \end{cases}$$

*) Sai số để hạn chế bước lặp: Ta có sai số

$$|x_n - x^*| \le \frac{M-m}{m}|x_n - x_{n-1}|$$

Dễ có $M = |f'(1.5)| = 5.95; m = |f'(1)| = 2.4$ Như vậy để có được nghiệm ở mức chính xác 0.002 khi dừng ở bước thứ n sao cho $|x_n - x_{n-1}| \le \frac{m}{M-m}0.002 = 0.0071$.

*) Dùng công thức lặp và thao tác trên máy tính cầm tay ta có kết quả bởi bảng sau

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1	
1	1.148148	0.148148
2	1.187557	0.039409
3	1.197073	9.10^{-3}
4	1.199315	2.2×10^{-3}

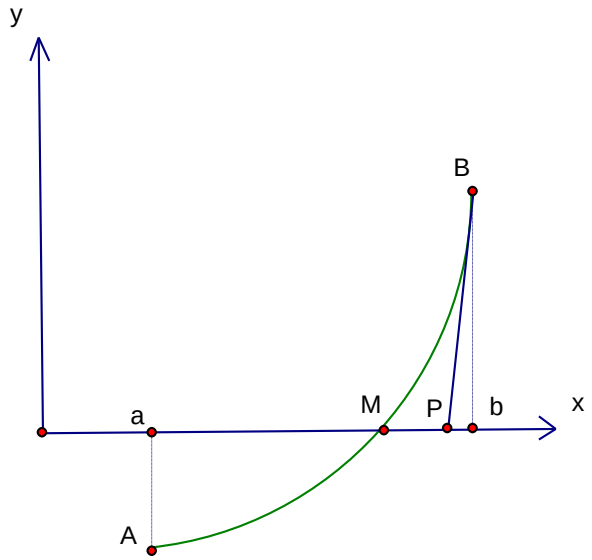
Ta thấy ở bước thứ 4 thì nghiệm đã thỏa mãn sai số, nên $x^* \approx x_4 = 1.199315$.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $x^3 - \cos x + x = 0$

a) Hãy tìm nghiệm gần đúng của phương trình trên bằng phương pháp dây cung đến lần lặp thứ 4 và đánh giá sai số mắc phải.
b) Hãy tìm nghiệm gần đúng của phương trình trên bằng phương pháp dây cung sao cho sai số không vượt quá 10^{-2}.

II.4. Phương pháp Newton (phương pháp tiếp tuyến)

Tư tưởng của phương pháp Newton là thay cung đồ thị AB của hàm $y = f(x)$ bởi tiếp tuyến tại A hoặc B rồi lấy hoành độ x_1 của giao điểm P của tiếp tuyến với trục hoành làm giá trị gần đúng của nghiệm x^*. Ta minh họa phương pháp này bởi hình sau:



Cho $x_0 = b$, phương trình tiếp tuyến tại B là

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Tại P ta có $x = x_1, y = 0$ ta có

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Từ đó

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Sau khi tính được x_1 ta có thể xét khoảng chứa nghiệm mới $[a, x_1]$ hoặc $[x_1, b]$ rồi tiếp tục áp dụng phương pháp tiếp tuyến. Cứ thế tiếp tục ta sẽ được các giá trị $x_2, x_3, \ldots$ ngày càng gần x^*

Tổng quát:

Với hàm $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0$ và không đổi dấu trên $[a, b]$. Khi đó ta thiết lập dãy lặp

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 \text{ chọn trước} \in [a, b] \text{sao cho } f(x_0).f''(x_0) > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Khi đó có thể chứng minh dãy lặp hội tụ đến nghiệm đúng và ta có ước lượng sai số sau:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$$

Với $0 < m \leq |f'(x)|, \ a \leq x \leq b$

Nhận xét:

Nhìn công thức (8) ta thấy phương pháp Newton thuộc loại phương pháp lặp đơn với hàm lặp

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Ví dụ 1:

Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình sau bằng phương pháp Newton (Phương pháp tiếp tuyến) đến mức sai số 10^{-7}

$$3x - e^x = 0.$$

Giải: Xét $f(x) = 3x - e^x$

$$f'(x) = 3 - e^x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 3.$$

Ta có bảng biến thiên

X	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$3(\ln 3 - 1) > 0$	↘	$-\infty$

Vậy phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất duy nhất trên khoảng $(-\infty; \ln 3)$.

Ta có $\left.\begin{matrix} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 3 - e > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất duy nhất trên $(0,1)$.

Có $\begin{matrix} f'(x) = 3 - e^x > 0, \forall x \in [0,1] \\ f''(x) = -e^x < 0, \forall x \in [0,1] \end{matrix}$ vậy các điều kiện của phương pháp Newton thỏa mãn.

Có $\left|x_n - x^*\right| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m} \le 10^{-7}$ với $m = \min\limits_{[0,1]} |f'(x)| = \min\limits_{[0,1]} \left|3 - e^x\right| = 3 - e. \Rightarrow \left|x_n - x^*\right| \le 3.10^{-8}$

Có $f(0)f''(0) = 1 > 0$, ta chọn $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{3x_n - e^{x_n}}{3 - e^{x_n}} \end{cases}$

Ta có bảng

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	0	-1
1	0.5	0.1487217
2	0.6100596	0.010362
3	0.6189968	7.10^{-5}
4	0.6190612	$<10^{-8}$

Vậy $x^* \approx x_4 \approx 0.6190612$.

Ví dụ 2:

Xét phương trình $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$. Hãy tính gần đúng nghiệm của phương trình đã cho trên $(-11; -10)$ đến bước lặp thứ 3 và đánh giá sai số mắc phải.

Giải:

*) Đặt $f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000$. Khi đó f liên tục trên $[-11; -10]$ và $f(-10) = -1050 < 0$, $f(-11) = 3453 > 0$ nên $f(x) = 0$ có nghiệm $x^* \in (-11, -10)$.

*) Kiểm tra điều kiện của phương pháp: $f'(x) = 4x^3 - 6x + 75 < 0$, $f''(x) = 12x^2 - 6 > 0$ trên $[-11, -10]$.

Với $x_0 = -11$, áp dụng (8) ta có công thức lặp khi đó (viết rõ biểu thức lặp) rồi tình toán trên máy tính ta có bảng

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	-11	3453
1	-10.3	134.3
2	-10.27	37.8
3	-10.261	0.149

*) Nghiệm gần đúng lần lặp thứ 3 là $x^* \approx x_3 = -10.261$. Hơn nữa dễ có $m = \min_{[-11;-10]} |f'(x)| = |f'(-10)| = 3865$. Như vậy sai số mắc phải là $|x^* - x_3| \le \frac{|f(x_3)|}{m} \le 4.10^{-5}$

Ví dụ 3 : Giải gần đúng nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình sau theo phương pháp Newton với những yêu cầu như Ví dụ 2.

$$x^3 + 4x^2 - 15 = 0$$

Chú ý: Xem hướng dẫn ấn máy tính giải nhanh các phương pháp giải gần đúng phương trình theo công thức lặp ở cuối bài giảng.

Chương 3(Buổi 4)

TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM CỦA MỘT HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

I. Mở đầu

Nhiều vấn đề của khoa học, kỹ thuật, kinh tế, môi trường… qui về việc giải hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ là ma trận hệ số, $b \in R^n$ là ma trận cột các hệ số tự do cho trước, $x \in R^n$ là vectơ phải tìm, thì hệ (1) được viết ở dạng

$$A.x = b \quad (2)$$

Về phương diện lý thuyết, hệ (2) có thể giải được trọn vẹn nhờ lý thuyết ma trận và định thức. Tuy nhiên, với trường hợp ma trận không suy biến, nếu giải bằng phương pháp Cramer thì số phép tính là rất lớn, cỡ $n!\,n^2$ phép tính nhân chia. Nhằm khắc phục hạn chế đó, trong chương này chúng ta xét một số phương pháp giải thực tế hệ phương trình (2) với đặc điểm chung là khối lương tính toán giảm nhẹ.

Trong số các phương pháp đó chúng ta chia làm hai nhóm phương pháp lớn là nhóm phương pháp trực tiếp và nhóm phương pháp gián tiếp.

Đặc điểm chung của nhóm phương pháp trực tiếp là sau một số hữu hạn phép tính sẽ có kết quả, vì vậy nhóm phương pháp này thường được áp dụng với một số bài toán có kích thước nhỏ, và các số liệu ban đầu là đúng. Tuy nhiên do phải thực hiện một số phép tính tương đối lớn nên có nguy cơ tích lũy sai số, nhất là đối với trường hợp các số liệu ban đầu không thật chính xác. Còn với nhóm phương pháp gián tiếp (phương pháp lặp) thường được áp dụng cho lớp các bài toán có kích thước lớn, số liệu ban đầu là có sai số.

Ngoài nội dung chính là giải hệ phương trình đại số tuyến tính, trong chương này cũng nghiên cứu cách tính gần đúng của ma trận nghịch đảo.

II. Phương pháp khử Gauss

Tư tưởng của phương pháp khử Gauss là đưa hệ phương trình (2) về dạng tam giác trên, lúc đó nghiệm được tìm nhờ phương pháp thế ngược. Quá trình đưa hệ (2) về một hệ tương đương dạng tam giác được gọi là quá trình khử, được thực hiện bởi lược đồ sau đây:

Ta chia phương trình thứ nhất cho a_{11} (nếu $a_{11} = 0$ thì ta có thể đổi chỗ các phương trình trong hệ để sao cho $a_{11} \neq 0$). Sau đó lần lượt nhân phương trình đó với $-a_{21}, -a_{31}, \ldots, -a_{n1}$ và theo thứ tự, cộng vào phương trình thứ hai, thứ ba, … thứ n. Bằng cách đó ta khử được x_1 ra khỏi các phương trình của hệ từ phương trình thứ hai trở đi. Bước tiếp theo là ta khử x_2 ra khỏi các phương trình từ thứ ba trở đi… Sau một số hữu hạn bước, ta đưa được hệ (2) về dạng tam giác sau đây:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = dn \end{cases}$$

Khi đó nghiệm $x^* = (x_1^*, \ldots x_n^*) \in R^n$ tìm được nhờ phép thế ngược.

Ví dụ: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$$

Giải:

Biến đổi ma trận hệ số ta được

$$A=\begin{bmatrix}8 & -3 & 2 & 20\\ 4 & 11 & -1 & 33\\ 6 & 3 & 12 & 36\end{bmatrix}\xrightarrow{h_1:8}\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{2}\\ 4 & 11 & -1 & 33\\ 6 & 3 & 12 & 36\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-4)\times h_1+h_2}\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{2}\\ 0 & \frac{25}{2} & -2 & 23\\ 6 & 3 & 12 & 36\end{bmatrix}\xrightarrow{(-4)\times h_1+h_3}\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{2}\\ 0 & \frac{25}{2} & -2 & 23\\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{21}{2} & 21\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2:\frac{25}{2}}\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{4}{25} & \frac{46}{25}\\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{21}{2} & 21\end{bmatrix}\xrightarrow{\left(-\frac{21}{4}\right)\times h_2+h_3}\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{4}{25} & \frac{46}{25}\\ 0 & 0 & \frac{567}{50} & \frac{567}{50}\end{bmatrix}$$

Như vậy hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1-\frac{3}{8}x_2+\frac{1}{4}x_3=\frac{5}{2}\\ x_2-\frac{4}{25}x_3=\frac{46}{25}\\ \frac{567}{50}x_3=\frac{567}{50}\end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $x^*=(3,2,1)$

III. Các phương pháp lặp đơn

III.1.1. Kiến thức chuẩn bị

Phương pháp khử Gauss đã xét ở trên, mặc dù có số phép tính ít hơn quy tắc Cramer rất nhiều, cũng không hiệu quả trong trường hợp hệ cỡ lớn hoặc ma trận hệ số có nhiều số 0. Do đó trong mục này, chúng ta tiến hành nghiên cứu nhóm phương pháp hiệu quả hơn để giải gần đúng nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính với độ chính xác tùy ý. Tất cả các phương pháp giải gần đúng hệ ĐSTT sẽ trình bày đều có chung một đặc điểm là xây dựng dãy lặp vectơ hội tụ tới nghiệm đúng.

Trước hết chúng ta có các khái niệm sau:

III.1.1.1. Giới hạn của dãy vectơ

Cho n dãy số $\{x_1^{(k)}\}, \{x_2^{(k)}\}, \dots, \{x_n^{(k)}\}$ với $k \in \mathbb{N}$ và $x_i^{(k)}$ là số hạng thứ k của dãy số thứ i.

Với mỗi k, đặt $\boldsymbol{v}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$, ta có ***dãy vectơ***

$$\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}, \dots$$

Khi $k \to \infty$, nếu mỗi thành phần thứ i của $\boldsymbol{v}^{(k)}$ có giới hạn là α_i, thì $\boldsymbol{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ được gọi là ***giới hạn*** của dãy $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$, và ta cũng nói $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ ***hội tụ*** tới $\boldsymbol{v}$.

Ví dụ: Xét ba dãy $\left\{\frac{1}{k}\right\}$; $\left\{\frac{k}{2k+1}\right\}$; $\left\{\frac{1}{k^2}\right\}$

Với mỗi k, đặt $v_k = (\frac{1}{k}, \frac{k}{2k+1}, \frac{1}{k^2}\}$ thì ta được một dãy vectơ hội tụ đến $v = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$.

III.1.1.1. Chuẩn của vec tơ và chuẩn của ma trận

Định nghĩa: Với $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{R}^n$, gọi $\max\{|x|_1, \dots, |x_n|\}$ là chuẩn vô hạn của vectơ $\boldsymbol{v}$, và ký hiệu

$$\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max\{|x|_1, \dots, |x_n|\}.$$

Chuẩn vô hạn thỏa mãn ba tích chất sau:

(*i*) $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$ với dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

(*ii*) $\|c\boldsymbol{v}\| = |c|\|\boldsymbol{v}\|$ đối với vô hướng c bất kỳ.

(*iii*) $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$ (*bất đẳng thức Tam giác*)

Nhờ khái niệm chuẩn vô hạn, ta có định lý về tiêu chuẩn hội tụ

Định lý: $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ hội tụ tới $\boldsymbol{v}$ nếu và chỉ nếu $\|\boldsymbol{v}^{(k)} - \boldsymbol{v}\|_\infty \to 0$ khi $k \to \infty$.

Trong việc xác lập sự hội tụ của một dãy vectơ tới nghiệm đúng và đánh giá sai số của nghiệm xấp xỉ so với nghiệm đúng ta cũng cần đến khái niệm chuẩn của ma trận.

Định nghĩa: Chuẩn vô hạn của ma trận thực $B = (b_{ij})_{n\times n}$, ký hiệu $\|B\|_\infty$, là số thực

$$\left\|B\right\|_\infty = \max\{\sum_{j=1}^{n}\left|b_{1j}\right|, \sum_{j=1}^{n}\left|b_{2j}\right|, \dots, \sum_{j=1}^{n}\left|b_{nj}\right|\}$$

Ví dụ:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0.03 & -0.02 \\ 0.02 & 0 & 0.04 \\ -0.04 & 0.01 & 0 \end{bmatrix}$$

có $\|B\|_\infty = \max\{0.05; 0.06; 0.05\} = 0.06$.

III.1.2. Phương pháp lặp đơn

III.1.2.1. Nội dung phương pháp

Cho hệ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ cỡ $n\times n$. Có nhiều cách để đưa hệ này về dạng $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ tương đương.

Ví dụ, tách $A = S - T$, trong đó S khả nghịch, thì

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow S\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}.$$

Đặt $B = S^{-1}T$, $\boldsymbol{g} = S^{-1}\boldsymbol{b}$, ta có hệ $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$.

Xây dựng dãy vectơ $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$, như sau:

Cho trước $\boldsymbol{v}^{(0)}$ rồi tính $\boldsymbol{v}^{(k)}$ theo công thức

$$\boldsymbol{v}^{(k+1)} = B\boldsymbol{v}^{(k)} + \boldsymbol{g} \quad (k = 0, 1, \dots). \qquad (1)$$

(1) là ***công thức tính lặp***, $k \geq 1$ là ***số lần lặp***.

Phương pháp tính $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ thế này là ***phương pháp lặp đơn***.

Nếu $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ hội tụ thì ta nói ***phương pháp lặp đơn hội tụ***.

Giả sử $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\} \to \boldsymbol{v}$. Lấy giới hạn ở hai vế của $\boldsymbol{v}^{(k+1)} = B\boldsymbol{v}^{(k)} + \boldsymbol{g}$

ta có

$$\boldsymbol{v} = B\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g},$$

$\Rightarrow \boldsymbol{v}$ là nghiệm của $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$, tức cũng là nghiệm của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, nếu k đủ lớn ta luôn có

$$\|\boldsymbol{v}^{(k)} - \boldsymbol{v}\|_\infty \le \varepsilon.$$

Khi đó ta nói $\boldsymbol{v}^{(k)}$ là ***nghiệm xấp xỉ của nghiệm đúng với độ chính xác*** ε.

Trong thực hành, ta bắt buộc phải dừng tính toán ở bước thứ k nào đó và xem $\boldsymbol{v}^{(k)}$ là nghiệm gần đúng.

Ví dụ 1: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -0.2x_2 - 0.1x_3 + 1 \\ x_2 = -0.1x_1 - 0.2x_3 + 1.2 \\ x_3 = -0.1x_1 - 0.1x_2 + 0.8 \end{cases}$$

Hệ trên tương đương $x = Bx + g$ với

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Với $\boldsymbol{v}^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)})$, $\boldsymbol{v}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$, xây dựng công thức tính lặp $\boldsymbol{v}^{(k+1)} = B\boldsymbol{v}^{(k)} + \boldsymbol{g}$, tức

$$x_1^{(k+1)} = -0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1$$
$$x_2^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} + 1.2$$
$$x_3^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)} + 0.8$$

Với xấp xỉ ban đầu $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ ta thu được kết quả, thể hiện ở bảng sau:

k	x_1	x_2	x_3
1	1	1.2	0.8
2	0.68	0.94	0.58
3	0.754	1.016	0.638
4	0.733	0.997	0.623
5	0.7383	1.0021	0.6273
6	0.73688	1.00077	0.62596
7	0.737250	1.00112	0.626235

Có thể thấy nghiệm đúng của hệ này là $x^* = (\frac{707}{955}, \frac{956}{955}, \frac{598}{955})$ do đó nghiệm $x^{(7)}$ tương đối chính xác.

III.1.2.2. Sự hội tụ của phương pháp và sai số của nghiệm xấp xỉ

Phương pháp lặp đơn áp dụng cho $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ với $B = (b_{ij})_{n\times n}$

Định lý: Nếu $\|B\|_\infty < 1$, thì với mọi $\boldsymbol{v}^{(0)} \in \mathrm{R}^n$ cho trước dãy $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ xác định bởi

$$\boldsymbol{v}^{(k+1)} = B\boldsymbol{v}^{(k)} + \boldsymbol{g} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

đều hội tụ tới nghiệm duy nhất $\boldsymbol{v}$ của $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$. Hơn nữa, có đánh giá sai số

$$\left|\left|v^{(k)}-v\right|\right|_\infty \le \left|\left|B\right|\right|_\infty^k \frac{1}{1-\left|\left|B\right|\right|_\infty}\left|\left|v^{(1)}-v^{(0)}\right|\right|_\infty$$

Nhận xét:

1) Với điều kiện của định lý, và với $\boldsymbol{v}^{(0)}$ và $\varepsilon > 0$ chọn trước, số lần lặp k để nghiệm xấp xỉ đạt độ chính xác ε (tức là $\|\boldsymbol{v}^{(k)} - \boldsymbol{v}\|_\infty < \varepsilon$), xác định từ bất phương trình

$$\frac{\left|\left|B\right|\right|_\infty^k}{1-\left|\left|B\right|\right|_\infty}\left|\left|v^{(1)}-v^{(0)}\right|\right|_\infty \le \epsilon$$

2) Sai số trong quá trình tính toán không ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng (Phương pháp lặp đơn có khả năng tự sửa sai).

Ví dụ 2: Quay lại Ví dụ 1. $\|B\|_\infty = 0.3 < 1$, nên phương pháp lặp đơn hội tụ.

Đánh giá sai số của $\boldsymbol{v}^{(7)}$ so với nghiệm đúng $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(0)} = (1, 1.2, 0.8)$$

$$\left|\left|v^{(7)}-v\right|\right|_\infty \le \left|\left|B\right|\right|_\infty^7 \frac{1}{1-\left|\left|B\right|\right|_\infty}\left|\left|v^{(1)}-v^{(0)}\right|\right|_\infty$$

$$= \frac{0.3^7}{1-0.3} \times 1.2 = 3.7 \times 10^{-4}$$

III.1.2.3. Phương pháp Jacobi

Nếu trong hệ $Ax = b$ ma trận A có tất cả các phần tử trên đường chéo khác 0, tách $A = S - T$, với

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

thì $Ax = b \Leftrightarrow Sx = Tx + b$.

Đặt $g = S^{-1}b$, và $B = S^{-1}T \Rightarrow x = Bx + g$.

Phương pháp lặp đơn tiến hành theo công thức $\boldsymbol{v}^{(k+1)} = B\boldsymbol{v}^{(k)} + \boldsymbol{g}$

được gọi là ***phương pháp Jacobi***.

Phương pháp Jacobi sẽ hội tụ, nếu $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ***ma trận đường chéo trội***, tức là $\forall\, i = 1, \dots, n$,

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \cdots + |a_{in}|$$

III.1.3. Phương pháp Gauss-Seidel

III.1.3.1. Nội dung phương pháp

Quay lại Ví dụ 1 trong phương pháp lặp đơn

$\boldsymbol{v}^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)})$ tính qua $\boldsymbol{v}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ nhờ

$$x_1^{(k+1)} = -0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1$$
$$x_2^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} + 1.2$$
$$x_3^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)} + 0.8$$

Cải tiến: Khi tính $x_2^{(k+1)}$ sử dụng ngay $x_1^{(k+1)}$ vừa tính được

$$x_2^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k+1)} - 0.2x_3^{(k)} + 1.2$$

Khi tính $x_3^{(k+1)}$ sử dụng ngay $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}$ vừa tính được.

$$x_3^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k+1)} - 0.1x_2^{(k+1)} + 0.8$$

Cụ thể:

tính $\boldsymbol{v}^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)})$ qua $\boldsymbol{v}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ theo các công thức

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} &= -0.1x_1^{(k+1)} - 0.2x_3^{(k)} + 1.2 \\ x_3^{(k+1)} &= -0.1x_1^{(k+1)} - 0.1x_2^{(k+1)} + 0.8 \end{aligned}$$

Với $\boldsymbol{v}^{(0)} = (0, 0, 0)$, ta tính được $\boldsymbol{v}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$ với

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -0.2(0) - 0.1(0) + 1 = 1 \\ x_2^{(1)} &= -0.1(1) - 0.2(0) + 1.2 = 1.1 \\ x_3^{(1)} &= -0.1(1) - 0.1(1.1) + 0.8 = 0.59 \\ \Rightarrow \boldsymbol{v}^{(1)} &= (1, 1.1, 0.59) \end{aligned}$$

Cách làm này được gọi là ***phương pháp Gauss-Seidel*** (một biến dạng của phương pháp lặp đơn). Tư tưởng chính của phương pháp Seidel là các thành phần vừa tính được của $\boldsymbol{v}^{(k+1)}$ được sử dụng ngay để tính thành phần tiếp theo của nó.

Ưu điểm của phương pháp Gauss-Seidel:

* *Tiết kiệm được bộ nhớ trong máy tính*

* *Nói chung phương pháp Gauss Seidel hội tụ nhanh hơn phương pháp lặp đơn.*

III.1.3.2. Sự hội tụ của phương pháp Seidel và đánh giá sai số của nghiệm xấp xỉ

Phương pháp Seidel áp dụng cho phương trình $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ với $B = (b_{ij})_{n\times n}$

Định lý: Nếu $\|B\|_\infty < 1$, thì với mọi $\boldsymbol{v}^{(0)} \in \mathrm{R}^n$ phương pháp Gauss Seidel đều hội tụ tới nghiệm duy nhất $\boldsymbol{v}$ của $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$. Hơn nữa có đánh giá sai số

$$\left\|v^{(k)} - v\right\|_\infty \le \mu^k \frac{1}{1-\mu}\left\|v^{(1)} - v^{(0)}\right\|_\infty$$

Trong đó

$$\mu = \max_{1\le i\le n} \frac{\beta_i}{1-\alpha_i} \text{ với } \alpha_i = |b_{i1}| + \cdots + |b_{i\,i-1}|, \beta_i = |b_{ii}| + \cdots + |b_{in}|.$$

Chương 4(Buổi 5-6)

TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Trong quá trình tính toán trong toán học cũng như trong khoa học kỹ thuật, ta thường gặp bài toán thực tế phải tính đạo hàm cũng như tích phân của một hàm số cho dưới dạng bảng, hoặc là hàm số được cho bởi một biểu thức giải tích nhưng khá phức tạp. Khi đó nếu tính trực tiếp đạo hàm hoặc tích phân sẽ gặp khó khăn, từ đó nảy sinh ra nhu cầu tính gần đúng đạo hàm và tích phân.

I. Tính gần đúng đạo hàm

Để tính gần đúng đạo hàm chúng ta có hai phương pháp chính là phương pháp sử dụng đa thức nội suy và sử dụng khai triển Taylor. Ở mục này, chúng ta chỉ xét phương pháp tính gần đúng đạo hàm sử dụng khai triển Taylor.

Nội dung phương pháp:

Trước hết ta nhắc lại công thức khai triển Taylor: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm đến cấp $n+1$ tại một lân cận của điểm x_0. Khi đó ta có công thức khai triển Taylor bậc n của $f(x)$ tại x_0 là

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 f''(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(c)$$

Với $c = x_0 + \theta(x-x_0),\ 0 < \theta < 1$

Công thức này có giá trị tại x nằm trong lân cận của x_0.

Theo công thức Taylor ta có:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(c)$$

$$c = x + \theta h\ ,\ 0 < \theta < 1$$

Khi h bé thì số hạng cuối cùng ở vế phải rất bé, ta có thể bỏ qua và có

$$f(x+h) - f(x) \approx hf'(x)$$

Vậy có

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Cũng như vậy, ta có công thức gần đúng tính đọa hàm cấp hai

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

Nhận xét: Chúng ta cũng có thể đưa ra công thức tính gần đúng đạo hàm như trên bằng cách sử dụng định nghĩa của đạo hàm tại một điểm.

Ví dụ:

Cho giá trị hàm $f(x)$ tại một số điểm bởi bảng sau

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	0.09983	0.19867	0.29552	0.38942

Tính đạo hàm của hàm $f'(0.2)$; $f''(0.2)$ và các đạo hàm cấp 2, cấp 3 có thể tính được

Giải:

Ta có

$$f'(0.2) \approx \frac{f(0.3) - f(0.2)}{0.1} = 0.9685$$

Tương tự cho các đạo hàm khác

II. Tính gần đúng tích phân xác định

Cho hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[a,b]$, trường hợp có nguyên hàm $F(x)$ của nó thì ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Trường hợp không tính được nguyên hàm của $f(x)$ ở dạng sơ cấp hoặc nguyên hàm đó quá phức tạp thì tích phân trên phải được tính gần đúng. Sau đây ta sẽ trình bày công thức tính gần đúng tích phân là công thức hình thang, công thức parabol.

II.1. Công thức hình thang

II.1.1. Xây dựng công thức

Giả sử cần tính $\int_a^b f(x)dx$. Ta đã biết về mặt hình học, giá trị của tích phân này chính là diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = 0,\ x = a$ và $x = b$.

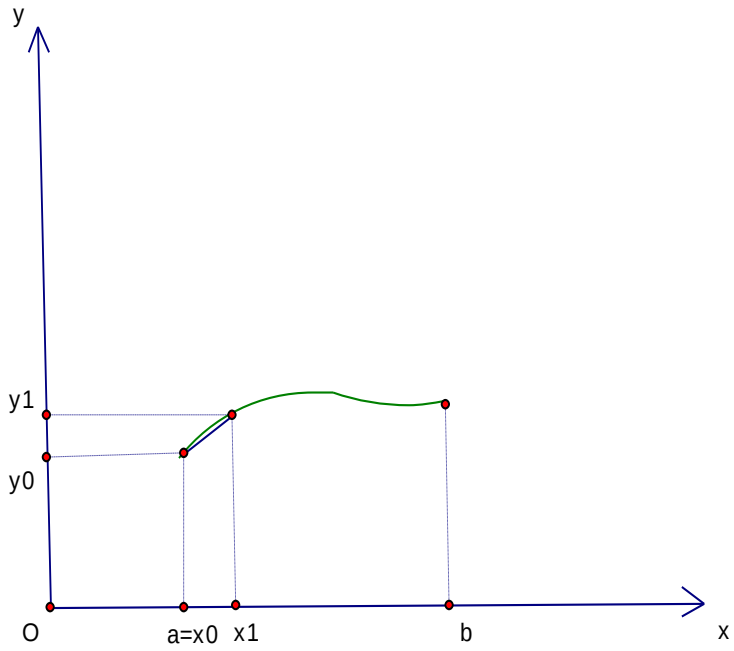
Ta chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia x_i

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_i = a + ih \ \ , \ \ h = \frac{b-a}{n}, \qquad i = 0, 1, \ldots n$$

Đặt $y_i = f(x_i)$

Bây giờ trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, ta thay việc tính diện tích hình thang cong bởi việc tính diện tích hình thang thực sự.



Khi đó:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h\frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

Từ đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right) \quad (1)$$

Công thức (1) được gọi là công thức hình thang.

II.1.2. Đánh giá sai số

Người ta chứng minh được sai số tuyệt đối trong trường hợp này là

$$\epsilon \le \frac{M(b-a)}{12}h^2 \ , \qquad M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Ví dụ: Tính tích phân sau với $n = 4$ và đánh giá sai số

$$\int_1^5 \frac{dx}{x}$$

Giải:

Ta có $[a,b] = [1,5]$, $f(x) = \frac{1}{x}$, áp dụng công thức (1) ta có

$$\int_1^5 \frac{dx}{x} \approx \frac{5-1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] = \frac{101}{60}$$

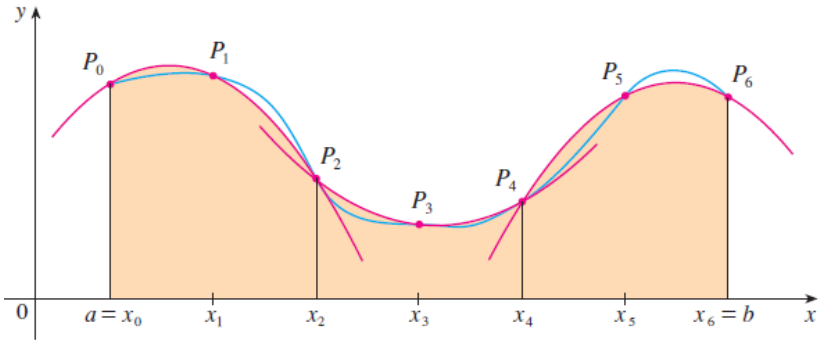
$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow M = \max_{x\in[1,5]} |f''(x)| = 2$$

Sai số

$$\epsilon \le \frac{2(5-1)}{12}.1 = 0.75$$

II.2. Công thức parabol (Simpson)

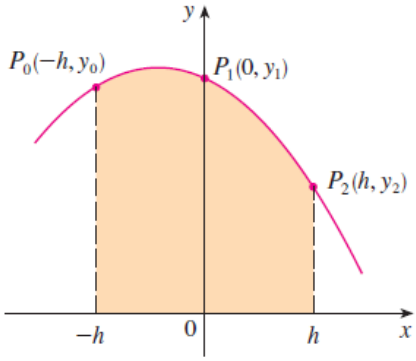
Một công thức khác cho kết quả xấp xỉ tích phân bằng việc thay các đoạn thẳng bởi parabol để xấp xỉ đường cong. Cũng như trước, ta phân hoạch đoạn $[a,b]$ thành n đoạn con với độ dài $h = \Delta x = (b-a)/n$, nhưng lúc này ta giả sử rằng n là một số chẵn. Khi đó mỗi cặp điểm liên tiếp của các khoảng ta xấp xỉ đường cong $y = f(x) \ge 0$ bởi một parabola như Hình 7 đã chỉ ra. Nếu $y_i = f(x_i)$, thì $P_i(x_i, y_i)$ là điểm trên đường cong nằm phía trên x_i. Một đường parabol đi qua ba điểm liên tiếp P_i, P_{i+1} và P_{i+2}.



HÌNH 7

Để cho đơn giản trong tính toán, ta đầu tiên xét trường hợp khi $x_0 = -h,\ \ x_1 = 0$ và $x_2 = h$. (Xem Hình 8.) Ta biết rằng phương trình của parabol đi qua $P_0,\ P_1,\ P_2$ có dạng $y = Ax^2 + Bx + C$ và do vậy diện tích phía dưới parabol từ $x = -h$ đến $x = h$ là

$$\int_{-h}^{h}(Ax^2 + Bx + C)dx = A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\Big]_{-h}^{h}$$
$$= A\frac{h^3}{3} + B\frac{h^2}{2} + Ch + A\frac{h^3}{3} - B\frac{h^2}{2} + Ch$$
$$= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$



HÌNH 8

Nhưng vì parabol đi qua $P_0(-h, y_0), P_1(0, y_1)$, và $P_2(h, y_2)$, ta có

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_1 = C$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

và do đó $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$

Vậy, ta có thể viết lại diện tích phía dưới parabol như sau

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Bây giờ bằng cách di chuyển parabol này theo chiều nằm ngang mà không thay đổi miền diện tích phía dưới của nó. Điều này có nghĩa là diện tích phía dưới parabol đi qua $P_0,\ P_1$ và P_2 từ $x = x_0$ đến $x = x_2$ trong Hình 7 vẫn là

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Một cách tương tự, diện tích phía dưới của parabol đi qua P_2, P_3 và P_4 từ $x = x_2$ đến $x = x_4$ là

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Nếu ta tính diện tích phía dưới các parabol theo cách này và cộng các kết quả lại, ta được

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Ta nhận được kết quả xấp xỉ cho trường hợp mà $f(x) \geq 0$, tuy nhiên nó vẫn đúng cho bất kỳ hàm liên tục f và được gọi là Quy tắc Simpson do nhà toán học người Anh, Thomas Simpson (1710-1761) đề xuất. Chú ý rằng số hạng có các hệ số là : 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, ..., 4, 2, 4, 1.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \cdots + y_{2n-2})]$$

Với công thức trên, ta có đánh giá sai số $\epsilon \leq \frac{Mh^4}{180}(b-a)\,, M = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$

Ví dụ: Tính gần đúng tích phân sau theo công thức parabol với $n = 5$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

Giải:

Ta có $a = 0,\ b = 1,\ f(a) = 1,\ f(b) = \frac{1}{2}$

$$4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)] = 4 \times 3.46$$

$$2[f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)] = 2 \times 2.728$$

Vậy

$$I \approx \frac{1}{6.5}\left[1 + \frac{1}{2} + 4 \times 3.46 + 2 \times 2.728\right] = 0.693$$

Chương 5(tuần 7-8-9-10)

GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

I. Giải gần đúng phương trình vi phân thường

I.1. Một số khái niệm mở đầu

Ta bắt đầu bằng việc xét phương trình vi phân cấp một sau:

$$y' = 2x + 1 \quad (1)$$

Rõ ràng nghiệm tổng quát của nó là

$$y = x^2 + x + C \quad (2)$$

Phụ thuộc vào một hằng số tùy ý C, mỗi giá trị cụ thể của C cho ta một nghiệm cụ thể. Để có một nghiệm xác định (phản ánh một tình huống cụ thể) ta phải xác định được giá trị tương ứng của C. Muốn thế ngoài phương trình (1) ta phải thêm một điều kiện phụ, chẳng hạn

$$y(1) = 2 \quad (3)$$

Hàm số (2) thỏa mãn điều kiện (3) nên suy ra

$$2 = 1^2 + 1 + C \Rightarrow C = 0$$

Vậy hàm số $y(x)$ vừa thỏa mãn (1) vừa thỏa mãn (3) là $y = x^2 + x$

Điều kiện (3) gọi là điều kiện Cauchy (hay điều kiện ban đầu) của bài toán và bài toán tìm hàm số $y(x)$ vừa thỏa mãn phương trình vi phân (1) vừa thỏa mãn phương trình (3) gọi là bài toán Cauchy (hay bài toán giá trị ban đầu) đối với phương trình vi phân (1).

Một cách tổng quát ta có phát biểu sau:

Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân cấp 1 là bài toán tìm nghiệm $y = y(x)$ xác định trên $[x_0, X]$ thỏa mãn

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x_0 < x < X \qquad (I)$$

Trong đó $f(x,y)$ là một hàm số đã biết của hai đối số x, y, x_0, X, y_0 là các số thực cho trước.

Điều kiện $y(x_0) = y_0$ được gọi là điều kiện ban đầu hay điều kiện Cauchy.

Việc tìm nghiệm của bài toán Cauchy thường rất phức tạp, trừ một lớp nhỏ những phương trình vi phân tương đối đơn giản là có thể tìm được nghiệm đúng, còn nói chung là không thể tìm được nghiệm một cách chính xác. Do đó chúng ta phải tìm các phương pháp gần đúng để giải phương trình vi phân.

Sau đây chúng ta nghiên cứu hai phương pháp cơ bản để giải gần đúng phương trình vi phân thường là phương pháp Euler và phương pháp Euler cải tiến.

I.2. Một số phương pháp giải gần đúng phương trình vi phân thường

I.2.1. Phương pháp Euler

Trước hết ta chia $[x_0, X]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia x_i

$$x_i = x_0 + ih \quad , \quad i = 0, \dots, n$$

$$h = \frac{X - x_0}{n}$$

Ta gọi tập các điểm $\{x_i\}$ là một lưới sai phân trên $[x_0, X]$, gọi các điểm x_1 là các nút của lưới và gọi h là bước đi của lưới. Ở đây $h = const$ nên ta có một lưới đều.

Giả sử $y(x)$ là nghiệm đúng của bài toán (I). Mục đích của phương pháp Euler là tìm cách tính gần đúng giá trị của $y(x)$ chỉ tại các nút x_i mà thôi, chứ không phải tại mọi điểm $x \in [x_0, X]$.

I.2.1.1. Xây dựng công thức tính

Gọi $y(x)$ là nghiệm của bài toán (I), $y(x_i)$ là giá trị của y tại điểm x_i, u_i là giá trị gần đúng của $y(x_i)$ mà ta muốn tính. Sau đây ta xây dựng công thức tính u_i.

Giả sử đã biết u_i tại nút x_i và muốn tính u_{i+1} tại nút x_{i+1}.

Ta khai triển Taylor hàm $y(x)$ tại x_i

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(c_i)}{2}(x - x_i)^2$$

$$c_i = x_i + \theta(x - x_i)\ ,\ \ 0 < \theta < 1$$

Thay $x = x_{i+1} = x_i + h,\ \ y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ vào đẳng thức trên ta được

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf\big(x_i, y(x_i)\big) + \frac{h^2}{2}y''(c_i)$$

Khi h bé, số hạng cuối cùng ở vế phải có thể coi là bé, không đáng kể, ta bỏ qua, sau đó thay $y(x_i)$ bằng u_i ta có công thức

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i) \quad (4)$$

Công thức này cho phép tính u_{i+1} khi đã biết u_i. Điều kiện Cauchy $y(x_0) = y_0$ gợi ý cho ta đặt

$$u_0 = y_0 \quad (5)$$

Bây giờ trong (4) cho $i = 0$ ta tính được u_1, sau đó cho $i = 1,2,...$ ta tính được $u_2, u_3, ...$

Phương pháp tính u_i theo các công thức (4), (5) gọi là phương pháp Euler.

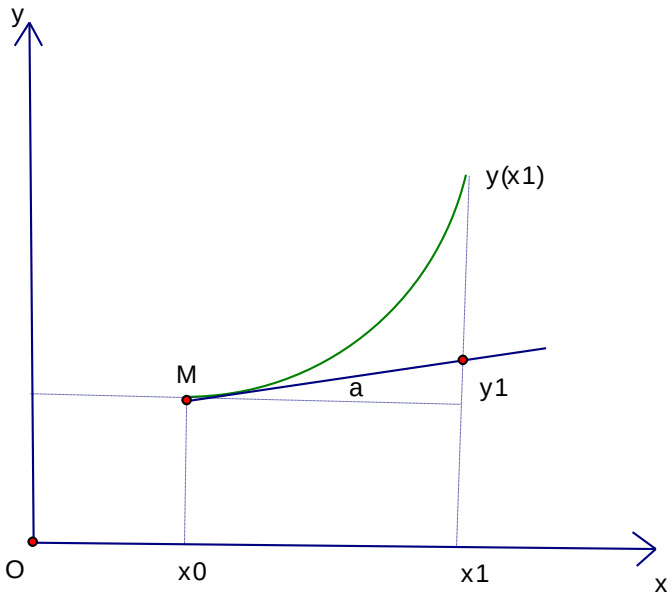
Ta thấy rằng, với phương pháp Euler việc tính ra u_{i+1} khi đã biết u_i rất đơn giản, không phải giải một phương trình nào dù hàm $f(x, y)$ là tuyến tính hay phi tuyến đối với y.

I.2.1.2. Ý nghĩa hình học và ví dụ

Ta có minh họa hình học cho phương pháp Euler như sau:

Từ điểm $M(x_0, y_0)$ ta kẻ tiếp tuyến với đường cong tích phân. Tiếp tuyến này cắt đường $x = x_1 = x_0 + h$ tại điểm $M_1(x_1, y_1)$. Khi đó có

$$y_1 = h.\tan\alpha + y_0 = h.y'(x_0) + y_0 = y_0 + h.f(x_0, y_0)$$



Ví dụ: Tìm nghiệm gần đúng của bài toán sau nhờ phương pháp Euler

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Trong đoạn $x \in [0, \frac{1}{2}]$ với $h = 0.1$

Giải: Với $h = 0.1$ suy ra $n = 5$; $f(x, y) = \frac{xy}{2}$.

Khi đó áp dụng công thức Euler (4)

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i) \\ u_0 = y(0) = 1 \end{cases}$$

Áp dụng liên tiếp công thức (4) ta thu được kết quả như sau:

i	x_i	u_i	$f(x_i, u_i)$	$hf(x_i, u_i)$
0	0	1	0	0
1	0.1	1	0.05	0.005
2	0.2	1.005	0.1005	0.0101
3	0.3	1.0151	0.1523	0.0152
4	0.4	1.0303	0.2061	0.0206
5	0.5	1.0509	0.2627	0.0263

I.2.2. Phương pháp Euler cải tiến

Để có được phương pháp số giải gần đúng bài toán (I) với độ chính xác cao hơn phương pháp Euler, chúng ta đưa ra công thức sau, gọi là công thức Euler cải tiến (hay Euler-Cauchy)

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ u_{i+1}^* = u_i + hf(x_i, u_i) \\ u_{i+1} = u_i + \dfrac{h}{2}\left(f(x_i, u_i) + f(x_{i+1}, u_{i+1}^*)\right) \end{cases}$$

Ví dụ:

Tìm nghiệm gần đúng của bài toán sau nhờ phương pháp Euler cải tiến

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Trong đoạn $x \in [0, \frac{1}{2}]$ với $h = 0.1$

Giải: Ta có $h = 0.1$ suy ra $n = 5$; $f(x, y) = \frac{xy}{2}$.

Khi đó áp dụng công thức (5) ta được bảng kết quả :

i	x_i	u_i	$hf(x_i, u_i)$	u^*_{i+1}	$hf(x_{i+1}, u^*_{i+1})$	$\frac{h}{2}(f(x_i, u_i) + f(x_{i+1}, u^*_{i+1}))$
0	0	1	0	1	0.005	0.0025
1	0.1	1.0025	0.005	1.0075	0.0101	0.0076
2	0.2	1.0101	0.0101	1.0202	0.0153	0.0127
3	0.3	1.0228	0.0153	1.0381	0.0208	0.0181
4	0.4	1.0409	0.0208	1.0617	0.0265	0.0237
5	0.5	1.0646				

II. Giải gần đúng phương trình đạo hàm riêng

II.1. Một số phương trình đạo hàm riêng thường gặp trong kỹ thuật

II.1.1. Định nghĩa

a. Một số kí hiệu chung

Cho Ω là một miền trong R^n, $u: \Omega \to X$, $u(x) = u(x_1, x_2, .., x_n)$

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}, \qquad k \in N$$

$C(\Omega)$: tập các hàm liên tục trên Ω

$C^k(\Omega)$: tập các hàm liên tục có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp k trên Ω.

b. Một số định nghĩa chung về phương trình đạo hàm riêng

- Phương trình đạo hàm riêng là phương trình có dạng

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) = 0 \quad (1), x \in \Omega$$

Trong đó F là một hàm đã cho nào đó, $u: \Omega \to R$ là hàm cần tìm (ẩn hàm).

- Cấp của phương trình: là cấp của đạo hàm riêng cao nhất xuất hiện trong phương trình
- Nghiệm của phương trình: là hàm $u \in C^k(\Omega)$ thỏa mãn (1).
- Giải phương trình đạo hàm riêng là tìm tất cả các nghiệm của nó.

II.1.2. Phân loại phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai

Xét phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \ \ (2), \qquad x \in \Omega \subset R^n$$

Giả sử $a_{ij} = a_{ji}$, đặt $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ là ma trận đối xứng.

Lấy $x_0 \in \Omega$, $A = A(x_0)$ có n giá trị riêng thực (do A đối xứng).

Giả sử A có n^+ giá trị riêng dương, n^- giá trị riêng âm, n_0 giá trị riêng bằng 0.

Định nghĩa: Phương trình (2) được gọi là thuộc loại

- Elliptic tại x_0 nếu $n^+ = n$ hoặc $n^- = n$
- Hyperbolic tại x_0 nếu $\begin{cases} n^+ = n-1 \\ n^- = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n^+ = 1 \\ n^- = n-1 \end{cases}$
- Parabolic tại x_0 nếu $\begin{cases} n^+ = n-1 \\ n_0 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n^- = n-1 \\ n_0 = n-1 \end{cases}$

Một phương trình được gọi là thuộc loại elliptic (hyperbolic, parabolic) trên Ω nếu nó thuộc loại đó tại mọi điểm của Ω.

Một phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai luôn đưa được về dạng chính tắc có dạng

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n^+}^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n^++1}^2} - \dots - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n^++n^-}^2} + G\left(\xi, v, \frac{\partial v}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial \xi_n}\right) = 0$$

II.1.3. Một số phương trình đạo hảm riêng thường gặp trong kỹ thuật

a. Phương trình Laplace

$$\Delta u = 0 \ , x \in \Omega \subset R^n$$

$$\Delta u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} : \ \text{Toán tử Laplace}$$

Phương trình Laplace mô tả nhiều hiện tượng quan trọng như phân bố nhiệt độ trong vật thể ở trạng thái dừng, trường điện thế, trường hấp dẫn…

b. Phương trình truyền nhiệt

$$u_t - a^2 \Delta u = f \ ; \ (x,t) \in \Omega \times R$$

Phương trình truyền nhiệt mô tả sự truyền nhiệt trong vật thể dẫn nhiệt Ω theo thời gian có hệ số truyền nhiệt và nhiệt dung riêng không thay đổi.

$f = f(x,t)$: mật độ nguồn nhiệt trong Ω

$u = u(x,t)$: nhiệt độ của Ω tại tọa độ x, thời điểm t

c. Phương trình truyền sóng

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \ \ ; \ (x,t) \in \Omega \times R \ \ ; c = const$$

$n = 1$: Phương trình trên mô tả dao động của sợi dây (sóng âm) truyền trong đường ống. Khi đó u là li độ dao động ở tọa độ x, thời điểm t.

$n = 2$: Phương trình trên mô tả dao động của màng, sóng âm trên mặt nước nông.

$n = 3$: Phương trình trên mô tả dao động sóng âm, sóng ánh sáng.

II.2. Phương pháp lưới giải gần đúng phương trình đạo hàm riêng

Phương pháp lưới là một trong các phương pháp số thông dụng để giải bài toán biên đối với các phương trình đạo hàm riêng.

Ý tưởng của phương pháp lưới được thể hiện như sau: trong miền biến thiên của các biến độc lập chúng ta tạo ra một lưới nhờ các đường thẳng song song với hai trục tọa độ. Điểm giao nhau của các đường thẳng đó gọi là các nút lưới (điểm lưới). Tại các điểm lưới thay đạo hàm trong phương trình kể cả điều kiện biên bởi các biểu thức xấp xỉ.

Nghiệm của hệ phương trình này chính là các giá trị gần đúng của nghiệm bài toán ban đầu tại các điểm lưới.

Trong mục này ta sẽ xem xét các bài toán biên đối với phương trình dạng elliptic, hyperbolic và parabolic.

II.2.1.Phương pháp lưới giải gần đúng phương trình elliptic

Xét phương trình elliptic sau:

$$Lu = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f \quad (1)$$

Với a, b, c, d, g, f là các hàm của hai biến độc lập x và y xác định trong miền hữu hạn G với biên Γ.

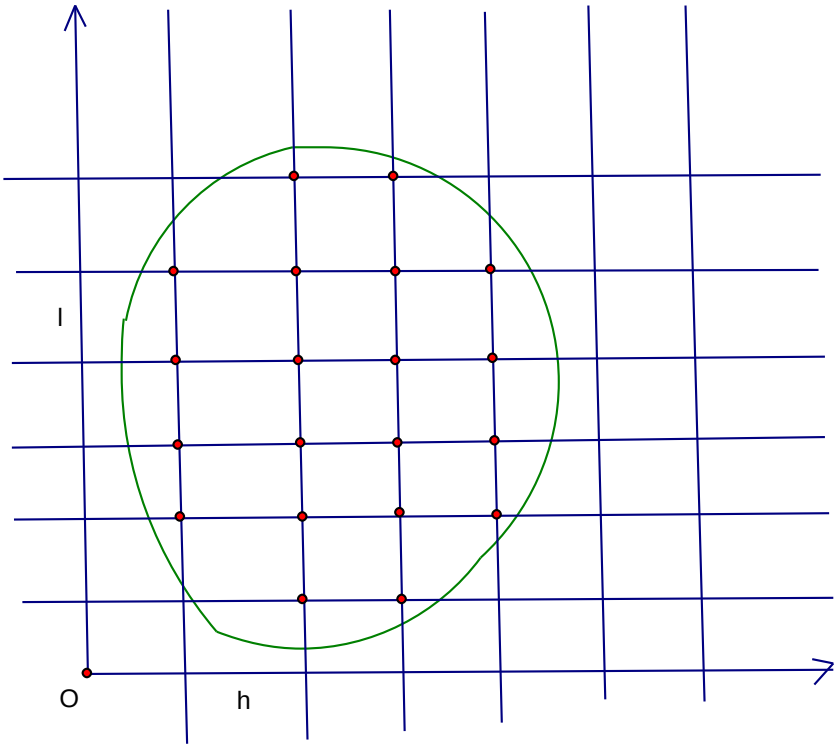
Giả sử a, b, c, d, g, f là các hàm liên tục trong $G \cup \Gamma$ và $a > 0, b > 0, g < 0$, $\forall (x, y) \in G \cup \Gamma$.

Chúng ta tìm nghiệm u của (1), $u \in C(G)$ và $u|_\Gamma = \varphi$ (2), φ liên tục trên Γ.

Xét hai họ đường thẳng song song với các trục tọa độ

$$x = x_0 + ih \ , i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$y = y_0 + jh \ , j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Trong đó $h > 0, l > 0$ là các số đã cho (bước lưới theo Ox, Oy). Điểm giao nhau của các đường thẳng này gọi là



điểm lưới (hay được gọi là các điểm nút)

Chúng ta chỉ xét các điểm lưới thuộc $G \cup \Gamma$. Nếu hai điểm lưới cách xa nhau theo trục Ox hoặc Oy một khoảng bước của lưới thì ta nói đó là các điểm kề.

Những điểm lưới (của $G \cup \Gamma$) mà bốn điểm kề cùng thuộc tập các điểm lưới của $G \cup \Gamma$ gọi là các điểm lưới trong. Tập hợp tất cả các điểm lưới trong gọi là G^*.

Những điểm lưới dù chỉ có một điểm lưới kề không thuộc tập các điểm lưới của $G \cup \Gamma$ gọi là các điểm lưới biên. Tập hợp các điểm lưới biên gọi là biên của miền lưới và ký hiệu là Γ^*.

Bây giờ chúng ta sẽ xấp xỉ phương trình (1).

Với mỗi điểm lưới trong (i,j) ta lập biểu thức sai phân thay thế các đạo hàm tại các điểm $(x_0 + ih, y_0 + ih)$ ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{(x_i,y_j)} \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}|_{(x_i,y_j)} \approx \frac{u(x_i, y_j + l) - u(x_i, y_j - l)}{2l}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_i,y_j)} \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{(x_i,y_j)} \approx \frac{u(x_i, y_j + l) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - l)}{l^2}$$

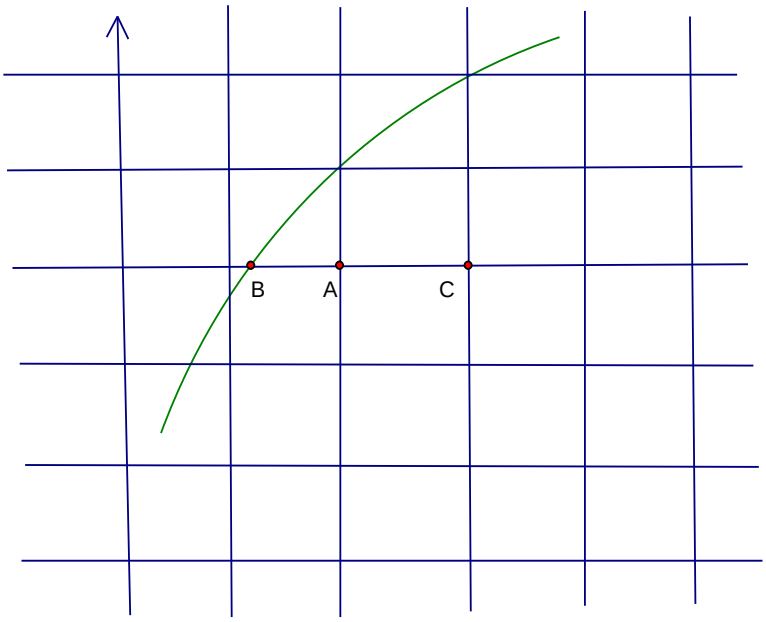
Do vậy chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} lu_{ij} = a_{ij} &\frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} \\ + b_{ij} &\frac{u(x_i, y_j + l) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - l)}{l^2} \\ + c_{ij} &\frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h} \\ + d_{ij} &\frac{u(x_i, y_j + l) - u(x_i, y_j - l)}{2l} + g_{ij} u_{ij} = f_{ij} \quad (3) \end{aligned}$$

Trong đó $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, g_{ij}, f_{ij}$ là giá trị các hệ số của (1) tại các điểm lưới (i,j).

Phương trình (3) chỉ có thể viết tại các điểm lưới trong. Nếu (i,j) là điểm lưới biên thì ta có công thức xấp xỉ Kollats

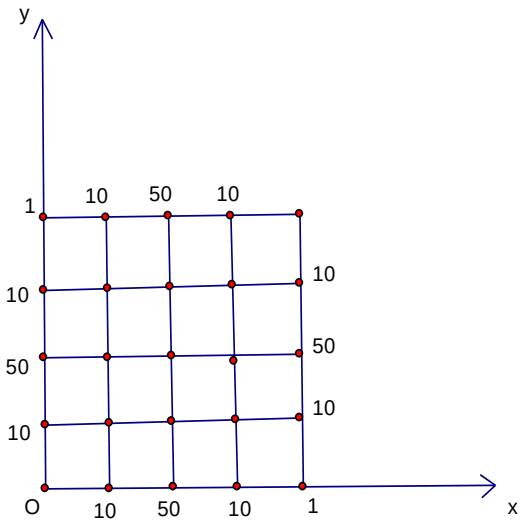
$$u_A = \frac{\delta_A u_C + h\varphi_B}{\delta_A + h} \text{ với } \delta_A = BA\,, h = AC$$



Vậy để xác định $u(x_i, y_j)$ ta có hệ phương trình tuyến tính (3).
Nghiệm của hệ này là giá trị gần đúng của nghiệm của bài toán (1), (2) tại (x_i, y_j).

Ví dụ: Sử dụng phương pháp lưới giải phương trình

$$\Delta u = 1, (x, y) \in \Omega = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$



với $h = l = \frac{1}{4}$ và giá trị u trên biên được cho bởi hình bên.

Giải: Gọi các điểm nút lần lượt là u_1 đến u_9 và thiết lập phương trình xấp xỉ tại các nút ta thu được

$$u_{A_1} = u_{A_3} = u_{A_7} = u_{A_9} = a$$
$$u_{A_2} = u_{A_4} = u_{A_6} = u_{A_8} = 4a - 70$$
$$u_{A_5} = 4a - 50$$

Tại nút A_5 ta thiết lập phương trình sai phân và cho ra phương trình

$$\frac{u_{A_2} + u_{A_4} + u_{A_6} + u_{A_8} - 4u_{A_5}}{h^2} = 1 \Rightarrow a = 34.9921875$$

Từ đó được giá trị u tại 9 điểm nút cần tìm.

II.2.2. Phương pháp lưới giải gần đúng phương trình hyperbolic

Xét phương trình hyperbolic

$$Lu = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f \quad (4)$$

Với a, b, c, d, g, f là các hàm của hai biến độc lập x và y xác định trong miền hữu hạn $G = \{-\infty < x < \infty,\ y \geq 0\}$.

Giả sử a, b, c, d, g, f là các hàm liên tục và bị chặn, $a, b > 0$.

Ta tìm nghiệm của (4) trong miền G, thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \psi(x), \qquad -\infty < x < \infty \quad (5)$$

Với $\varphi,\ \psi$ là các hàm đã cho.

Giả sử cho hai họ đường thẳng song song

$$x = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$
$$y = jl, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Điểm giao nhau của các đường thẳng này gọi là điểm lưới. Các điểm lưới nằm trên đường thẳng $y = 0$ mang các giá trị đã cho ban đầu gọi là các điểm lưới biên.

Đối với mỗi điểm lưới trong (i, j) ta lập phương trình sai phân xấp xỉ phương trình (4)

$$\begin{aligned} lu_{ij} = a_{ij}&\frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} \\ -b_{ij}&\frac{u(x_i, y_j + l) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - l)}{l^2} \\ +c_{ij}&\frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h} \\ +d_{ij}&\frac{u(x_i, y_j + l) - u(x_i, y_j - l)}{2l} + g_{ij}u_{ij} = f_{ij} \end{aligned}$$

Hay là

$$lu_{ij} = A_{ij}u_{ij+1} + B_{ij}u_{ij-1} + C_{ij}u_{i+1j} + D_{ij}u_{i-1j} + E_{ij}u_{ij} = f_{ij}$$

Với

$$A_{ij} = -\frac{b_{ij}}{l^2} + \frac{d_{ij}}{2l}\ , B_{ij} = -\frac{b_{ij}}{l^2} - \frac{d_{ij}}{2l}\ , C_{ij} = \frac{a_{ij}}{h^2} + \frac{c_{ij}}{2h}$$
$$D_{ij} = \frac{a_{ij}}{h^2} - \frac{c_{ij}}{2h}, E_{ij} = -\frac{2a_{ij}}{h^2} + \frac{2b_{ij}}{h^2} + \frac{2b_{ij}}{l^2} + g_{ij}$$

Chúng ta giả sử lưới đủ nhỏ để tại tất cả các điểm lưới $A_{ij} < 0$. Khi đó nếu biết giá trị nghiệm tại các điểm lưới thứ $j-1$ và thứ j ở các dãy ngang thì có thể tìm được nghiệm tại tất cả các điểm lưới thứ $j+1$ của dãy ngang. Các giá trị nghiệm ở hai dãy đầu $j=0, j=1$ có thể tìm được từ các điều kiện ban đầu bằng phương pháp sau:

Từ điều kiện (5) ta có

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, 0) \approx \frac{u(x_i, l) - u(x_i, 0)}{l}$$

Khi đó

$$u_{i0} = \varphi(ih) = \varphi_i \ ; \ \frac{u_{il} - u_{i0}}{l} = \psi(ih) = \psi_i$$

Hay là

$$u_{i0} = \varphi_i \, , u_{il} = \varphi_i + l\psi_i$$

Ví dụ:

II.2.3. Phương pháp lưới giải gần đúng phương trình parabolic

Xét phương trình parabolic

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial x} - cu = f \quad (6)$$

Trong đó a, b, c, f là các hàm hai biến độc lập x, t xác định trên miền $G = \{-\infty < x < +\infty \, , t \geq 0\}, \ a > 0.$

Chúng ta phải tìm nghiệm của phương trình (6) trong miền G thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = \varphi(x), -\infty < x < +\infty \quad (7)$$

$\varphi(x)$ là hàm đã cho.

Để tìm nghiệm gần đúng của bàn toán bằng phương pháp lưới, chúng ta xét lưới chữ nhật được tạo bởi các giao điểm của hai họ đường thẳng song song

$$x = ih \, , \quad i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.$$

$$t = jl, \qquad j = 0,1,2 \ldots$$

Đối với mỗi điểm lưới $(i, j), \ j \geq 1$ ta viết phương trình sai phân xấp xỉ phương trình (6) với độ chính xác nào đó.

Tại điểm lưới (x_i, y_j) các đạp hàm được thay tương ứng bằng các biểu thức sai phân

$$\frac{u(x_i + h, t_j) - u(x_i - h, t_j)}{2h}, \ \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2}$$

Thay $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$ bằng một trong ba biểu thức

$$\frac{u(x_i, y_j + l) - u(x_i, y_j)}{l}, \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_j - l)}{l}, \frac{u(x_i, y_j + l) - u(x_i, y_j - l)}{2l}$$

Sử dụng các công thức này ta có ba dạng xấp xỉ sai phân của (6)

$$l^{(1)}u_{ij} = \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{l} - a_{ij}\frac{u_{i+1\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1\,j}}{h^2} - b_{ij}\frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} - c_{ij}u_{ij}$$

$$= f_{ij}$$

$$l^{(2)}u_{ij} = \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{l} - a_{ij}\frac{u_{i+1\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1\,j}}{h^2} - b_{ij}\frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} - c_{ij}u_{ij}$$

$$= f_{ij}$$

$$l^{(3)}u_{ij} = \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l} - a_{ij}\frac{u_{i+1\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1\,j}}{h^2} - b_{ij}\frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h}$$

$$-c_{ij}u_{ij} = f_{ij}$$

Với $j = 0$, từ điều kiện (7) ta có

$$u_{i0} = \varphi(ih) = \varphi_i \ , i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.$$

MỘT SỐ HƯỚNG DẪN ẤN MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÍNH NHANH CÁC KẾT QUẢ SỐ:

I. Hướng dẫn ấn máy tính 500 MS, 570 MS, 500 ES, 570 ES hoặc các máy khác tương đương, để giải gần đúng nghiệm của phương trình phi tuyến bằng công thức lặp:

$$f(x) = 0$$

Với

$$f(x) = e^x - (x^2 + 10)$$

Ta giả sử với công thức lặp được thiết lập là

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = g(x_n) = ln(x_n^2 + 10) \end{cases}$$

+) Bước 1: Nhập giá trị ban đầu: Nhập giá trị x_0 và lưu vào một bộ nhớ A bằng cách ấn các phím 2 **Shift** **Sto** **A**.

+) Bước 2: Nhập biểu thức lặp: Thao tác trên biểu thức

$$g(x_n) = ln(x_n^2 + 10)$$

ở đâu có x_n thì ta ấn **Alpha** **A.** Sau khi nhập xong thì lưu vào chính A (**Shift** **Sto** **A**) ta được giá trị $x_1 = 2.63905733$

+) Bước 3: Lặp: Ấn phím = liên tiếp thì ta được các kết quả $x_2; x_3;$ ... và cho bởi bảng sau.

n	x_n
0	2
1	2.63905733
2	2.83113021
3	2.891221301
4	2.910128666
5	2.916085467
6	2.917962846
7	2.918554596
8	2.918741122
9	2.918799918
10	2.918818451

+) Chú ý:

- Mỗi lần ấn = thì nhớ ghi kết quả luôn.
- Nếu muốn tính giá trị của $f(x_n) = e^{x_n} - (x_n^2 + 10)$ thì ta làm như sau:
  Nhập biểu thức $f(x)$: Ở đâu có x_n ta ấn **Alpha** X sau đó ấn **CALC** máy hỏi X? Ta nhập giá trị x_n cần tính vào, **ví dụ** $x_{10} = 2.918818451$ ta nhập 2.918818451 rồi ấn = ta được kết quả $f(x_{10}) = -1.081925472 \times 10^{-4}$.

II. Hướng dẫn ấn máy tính 500MS; 500ES; 570MS; 570ES,…để giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel.

Ví dụ với hệ 3 phương trình 3 ẩn sau:

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 4 \end{cases}$$

…Dãy lặp Gauss-Seidel với giá trị ban đầu $x_0^{(0)} = (x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; x_3^{(0)}) = (0;0;0)$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{2}{7}x_2^{(k)} - \frac{3}{7}x_3^{(k)} + \frac{3}{7} & (1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{2}{9}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{9}x_3^{(k)} + \frac{4}{9} & (2) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{8}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_2^{(k+1)} + \frac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

+)Bước 1: Nhập và lưu giá trị ban đầu: $x_0^{(0)} = (x_1^0; x_2^0; x_3^0) = (0;0;0)$

0	Shift	Sto	A

0	Shift	Sto	B

0	Shift	Sto	C

+) Bước 2: Nhập các biểu thức của dãy lặp:

Nhập biểu thức 1 :

0	x	Alpha	A	+	2/7	x	Alpha	B	-	3/7	X	Alpha	C	+	3/7
Shift	Sto	A													

$\Rightarrow x_1^{(1)} = 0.428571$

Nhập biểu thức 2:

(-)	2/9	X	Alpha	A	+	0	x	Alpha	B	-	1/9	x	Alpha	C	+	4/9
Shift	Sto	B														

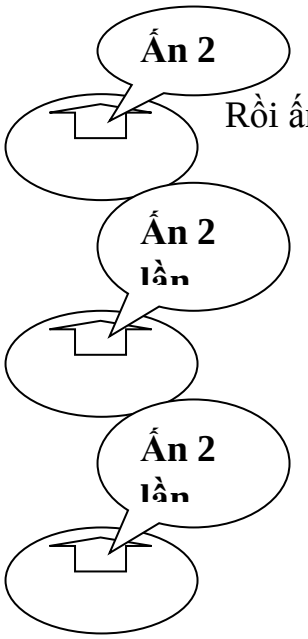
$\Rightarrow x_2^{(1)} = 0.349206$

Nhập biểu thức 3

1/8	x	Alpha	A	-	1/2	x	Alpha	B	+	0	X	Alpha	C	+	½
Shift	Sto	C													

$\Rightarrow x_3^{(1)} = 0.378968$

+) Bước 3:



Rồi ấn phím = $\Rightarrow x_1^{(2)} = 0.365929$

Rồi ấn phím = $\Rightarrow x_2^{(2)} = 0.321019$

Rồi ấn phím = $\Rightarrow x_3^{(2)} = 0.385232$

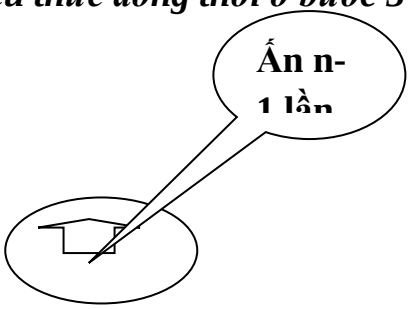
(*)Tiếp tục như bước 3 ta được x_2,… Và ta được bảng kết quả

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0.428571	0.349206	0.378968
2	0.365929	0.321019	0.385232
3	0.355192	0.322709	0.383044
4	0.356612	0.322636	0.383258
5	0.356500	0.322638	0.383243

Nghiệm $x^* \approx x^{(5)} = (0.356500;\ 0.322638; 0.383243)$

Chú ý: ***+) Được kết quả nào thì phải ghi luôn vào bảng kết quả.***

+)Nếu hệ n phương trình n ẩn thì ta làm tương tự như trên nhưng phải dùng một bộ n biến nhớ, và phải nhập n biểu thức đồng thời ở bước 3 phải ấn n-1 lần để quay trở lại biểu thức ban đầu



+)Lặp đơn thì phức tạp hơn và phải dùng đến 2 bộ nhớ.

<u>Hướng dẫn ấn máy tính 500MS; 500ES; 570MS; 570ES,…để giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp lặp đơn.</u>

Ví dụ với hệ 3 phương trình 3 ẩn:

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 4 \end{cases}$$

…Dãy lặp đơn với giá trị ban đầu $x_0^{(0)} = (x_1^0; x_2^0; x_3^0) = (0;0;0)$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{2}{7}x_2^{(k)} - \frac{3}{7}x_3^{(k)} + \frac{3}{7} & (1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{2}{9}x_1^{(k)} - \frac{1}{9}x_3^{(k)} + \frac{4}{9} & (2) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{8}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

+)Bước 1: Nhập và lưu giá trị ban đầu: $x_0^{(0)} = (x_1^0; x_2^0; x_3^0) = (0;0;0)$

0	Shift	Sto	A

0	Shift	Sto	B

0	Shift	Sto	C

+) Bước 2: Nhập các biểu thức của dãy lặp:

Nhập biểu thức thứ nhất :

0	x	Alpha	A	+	2/7	x	Alpha	B	-	3/7	X	Alpha	C	+	3/7
Shift	Sto	D													

$\Rightarrow x_1^{(1)} = 0.428571$

Nhập biểu thức thứ 2:

(-)	2/9	x	Alpha	A	+	0	x	Alpha	B	-	1/9	x	Alpha	C	+	4/9
Shift	Sto	X														

$\Rightarrow x_2^{(1)} = 0.444444$

Nhập biểu thức thứ 3

1/8	x	Alpha	A	-	1/2	x	Alpha	B	+	0	x	Alpha	C	+	1/2
Shift	Sto	Y													

$\Rightarrow x_3^{(1)} = 0.500000$

Bước tiếp theo ta làm lại bước 2 nhưng phải dùng trên bộ nhớ D, X, Y.

Nhập biểu thức thứ nhất :

0	x	Alpha	D	+	2/7	x	Alpha	X	-	3/7	X	Alpha	Y	+	3/7
Shift	Sto	A													

$\Rightarrow x_1^{(2)} = 0.341270$

Nhập biểu thức thứ 2:

(-)	2/9	x	Alpha	D	+	0	x	Alpha	X	-	1/9	x	Alpha	Y	+	4/9
Shift	Sto	B													

$\Rightarrow x_2^{(2)} = 0.293651$

Nhập biểu thức thứ 3

1/8	x	Alpha	D	-	1/2	x	Alpha	X	+	0	x	Alpha	Y	+	1/2

Shift	Sto	C

$\Rightarrow x_3^{(2)} = 0.331349$

+) Đối với máy 500 ES hoặc 570 ES, Để tính tiếp $x^{(3)}$ ta làm như sau: Ấn bàn phím **REPLAY** ngược lên 5 lần, sau đó ấn phim **REPLAY** sang trái 1 lần và ấn **DEL** rồi ấn = thì ta được $x_1^{(3)} = 0.370465$

Tương tự lại ẤN bàn phím **REPLAY** ngược lên 5 lần, sau đó ấn phim **REPLAY** sang trái 1 lần và ấn **DEL** rồi ấn = thì ta được $x_2^{(3)} = 0.331790$

Cứ thế ta được bảng sau:

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0.428571	0.444444	0.500000
2	0.341270	0.293651	0.331349
3	0.370465	0.331790	0.395833
4	0.353725	0.318137	0.380413
5	0.356434	0.323571	0.385147
6	0.355957	0.322443	0.382768
7	0.356654	0.322813	0.383088

Nghiệm $x^* \approx x^{(7)} = (0.356654;\ 0.322813; 0.383088)$

Chú ý: MÁY ES thì có đủ bộ số trên máy nên có làm phương pháp lặp đơn như hướng dẫn trên. Còn máy MS không đủ bộ số nên để tính với k=3 thì ta lại quay lại bước 2.

III. Giải gần đúng phương trình vi phân thường trên máy tính điện tử f(x) 570 ES.

Bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \quad với\ 0 < x \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Với $h = 0.1$

a. **Công thức Euler**:

$$\begin{cases} u_{n+1} = hf(x_n, u_n) + u_n \\ u_0 = y(0) = 0 \end{cases}$$

Tức là

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.1(x_n^2 + u_n^2) + u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

+) Bước 1: Khai báo công thức $u_{n+1} = 0.1(x_n^2 + u_n^2) + u_n$: Ở đâu có x_n ta ấn Alpha X; ở đâu có u_n ta ấn Alpha Y.

(Trong qui trình này ta đã dùng ô nhớ X để chứa giá trị x_n và ô nhớ Y để chứa giá trị của u_n.)

+) Bước 2: Tính toán lần 1: Ấn **CALC**, máy hỏi: X?

Khai báo $x_0 = 0$: Bấm phím 0 =

Máy hỏi tiếp: Y?

Khai báo: $u_0 = 1$: Bấm 1 = sẽ cho kết quả $u_1 = 1.1$

Đưa kết quả vào bộ nhớ **Y**: **Shift** **Sto** **Y**

Sau đó trở về công thức đã nhập: Bấm phím **REPLAY** ngược lên một lần.

+) Bước 3: ***Qui trình***: Ấn **CALC** máy hỏi: X?

Khai báo $x_1 = 0.1$: Bấm phím 0.1 =

Máy hỏi tiếp: Y?

Bấm = ($u_1 = 1.1$ đã có sẵn trong ô nhớ Y nên không cần khai báo lại) sẽ cho kết quả $u_2 = 1.222$

Đưa kết quả vào bộ nhớ **Y: Shift** **Sto** **Y**

Sau đó trở về công thức đã nhập: Bấm phím **REPLAY** ngược lên một lần.

+) Bước 4: Lặp lại ***Qui trình*** với thay đổi duy nhất là khi máy hỏi X? thì ta khai báo các giá trị tiếp theo: 0.2; 0.3; 0.4; ….; 1. Ta được bảng giá trị sau

n	x_n	u_n
0	0	1
1	0.1	1.1
2	0.2	1.222
3	0.3	1.3803284
4	0.4	1.586859049
5	0.5	1.863671213
6	0.6	2.246998253
7	0.7	2.800898367
8	0.8	3.649401534
9	0.9	5.062214689
10	1.0	7.724816445

b. Công thức Euler cải tiến ta cũng làm tương tự nhưng ta dùng them bộ nhớ thứ 3. Công thức Euler cải tiến

$$\begin{cases} \hat{u}_{n+1} = u_n + hf(x_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{2}\left(f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, \hat{u}_{n+1})\right) \\ u_0 = y(0) = 1 \end{cases}$$

Tức là ta có được

$$u_{n+1} = 0.05\left(x_n^2 + u_n^2 + x_{n+1}^2 + \left(u_n + 0.1(x_n^2 + u_n^2)\right)^2\right) + u_n \quad (*)$$

+) **Bước 1**: **Khai báo công thức** (*): Ở đâu có x_n thì ta ấn Alpha X; ở đau có u_n ta ấn Alpha Y; ở đâu có x_{n+1} ta ấn Alpha A.

(Tức là ta dùng ô nhớ X để lưu x_n; ô nhớ Y để lưu u_n và ô nhớ A để lưu x_{n+1}).

+) **Bước 2: Tính toán lần 1**: Bấm **CALC**, máy hỏi: X?

Khai báo $x_0 = 0$: Bấm phím 0 =

Máy hỏi tiếp: Y?

Khai báo: $u_0 = 1$: Bấm 1 =

Máy hỏi tiếp: A?

Khai báo $x_1 = 0.1$: Bấm 0.1 = sẽ cho kết quả $u_1 = 1.1$

Đưa kết quả vào bộ nhớ **Y**: **Shift** **Sto** **Y**

Sau đó trở về công thức đã nhập: Bấm phím **REPLAY** ngược lên một lần.

+) **Bước 3:** ***Qui trình***: Ấn **CALC** máy hỏi: X?

Khai báo $x_1 = 0.1$: Bấm phím 0.1 =

Máy hỏi tiếp: Y?

Bấm = ($u_1 = 1.1$ đã có sẵn trong ô nhớ Y nên không cần khai báo lại)

Máy hỏi tiếp: A?

Khai báo $x_2 = 0.2$: Bấm 0.2 = sẽ cho kết quả $u_2 = 1.222$

Đưa kết quả vào bộ nhớ **Y**: **Shift** **Sto** **Y**

Sau đó trở về công thức đã nhập: Bấm phím **REPLAY** ngược lên một lần.

+) **Bước 4**: Lặp lại ***Qui trình*** với thay đổi duy nhất là khi máy hỏi X? A? thì ta khai báo các giá trị tiếp theo: 0.2 (0.3); 0.3 (0.4); 0.4 (0.5); ….; 0.9 (1.0) Ta được bảng giá trị sau

n	x_n	u_n
0	0	1
1	0.1	1.051
2	0.2	1.109467678
3	0.3	1.178909589
4	0.4	1.26373277
5	0.5	1.369718589
6	0.6	1.504725574
7	0.7	1.679805854
8	0.8	1.911109639
9	0.9	2.22338971
10	1.0	2.657022002

IV. Tính giá trị của hàm trên một đoạn $[a;b]$ với các bước chia đều $h=\frac{b-a}{n}$ để nhằm tính gần đúng tích phân

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

Thao tác trên máy tính có chức năng **Table, ví dụ máy 500ES hoặc 570ES.**

+) **Bước 1**: Vào chế độ Table: **Mode** **7** (7. TABLE) màn hình hiện

f(X)=

+) **Bước 2:** Nhập biểu thức $f(x)$, ví dụ $f(x)=3^x-\frac{5}{x^2+6}$ trên $[a;b]=[1;3]$ với $h=0.2$. Ta nhập biểu thức bằng cách ở đâu có x ta ấn Alpha X.

+) Ấn = miền hình hiện Start? Ta nhập giá trị $a=1$ ấn 1 = máy hỏi End? Ta nhập $b=3$ ấn 3 =, máy hỏi Step? Ta nhập $h=0.2$: ấn 0.2 = máy sẽ cho ra bảng kết quả với 11 giá trị tại các điểm $x=1;1.2;\dots;3.0$ như sau

i	x_i	$f(x_i)$
1	1	2.2857
2	1.2	3.0651
3	1.4	4.0273
4	1.6	5.2154
5	1.8	6.6835
6	2.0	8.5
7	2.2	10.75
8	2.4	13.541
9	2.6	17.006
10	2.8	21.312
11	3.0	26.666

Ở đây hạn chế ở chỗ là cho ít chữ số sau dấu phẩy. Ta có thể tính giá trị bằng cách nhập biểu thức và dùng phím CALC để tính giá trị thì sẽ cho kq với 10 chữ số.

+) **Bước 1:** Nhập biểu thức $f(x)=3^x-\frac{5}{x^2+6}$ bằng cách ở đâu có x ta ấn Alpha X.

+) **Bước 2**: Ấn CALC máy hỏi X? ta nhập $x_0=1$ sau đó ấn = ta được $f(1)=2.285714286$

+) Ấn phím REPLAY ngược lên một lần để nhìn thấy biểu thức ta vừa nhập, sau đó lại thao tác lại bước 2 và khai báo $x_1=1.2$ ta được $f(1.2)=3.065149808$

Ngoài ra ta có thể tham khảo các phần mềm giải gần đúng khác như Maple, Mathematica, Excel.

Thao tác trên Maple 13

Giải gần đúng phương trình sau bằng phương pháp Newton trên Maple

$$x^3 + 4x^2 - 15 = 0$$

```
> f1 := x->x^3+4*x^2-15; ng(0) := 2;
```

$$x \to x^3 + 4x^2 - 15$$

```
daoham := diff(f1(x),x);
```

$$3x^2 + 8x$$

```
ng := proc(n) if n < 2 then n else ng(n-1)
      - f1(ng(n-1))/(3*(ng(n-1))^2+8*ng(n-1)) end if end proc;
```

```
proc(n)
    if n < 2 then
        n
    else
        ng(n - 1) - f[1](ng(n - 1))/(3*ng(n - 1)^2 + 8
        *ng(n - 1))
    end if
end proc
```

```
array([seq([n, evalf(subs(x = ng(n), x)), evalf(subs(x = ng(n),
    f1(x)))], n = 1..10)]);
```

1	1.	−10.
2	1.909090909	6.536438768
3	1.659671454	0.5896178624
4	1.632299438	0.006706814755
5	1.631980848	9.02995287410^{-7}
6	1.631980806	1.63767092910^{-14}
7	1.631980806	5.38652871310^{-30}
8	1.631980806	5.82738427810^{-61}
9	1.631980806	6.82029273310^{-123}
10	1.631980806	9.34247039310^{-247}

Bảng 1. Nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 + 4x^2 - 15 = 0$ qua pp Newton và giá trị của $f(x)$ tương ứng.

NỘI DUNG ÔN THI KIỂM TRA GIỮA KỲ

Câu 1 (**3,5 điểm**)

+ Sai số tuyệt đối, sai số tương đối, quy tròn số và sai số mắc phải

+ Tìm chữ số chắc, bài toán ngược của sai số.

+ Tính gần đúng một biểu thức với sai số cho trước.

Câu 2 (**3,5 điểm**) và **Câu 3** (**3,0 điểm**) Bao gồm toàn bộ chương 2: Giải gần đúng một phương trình phi tuyến:

+ Phương pháp chia đôi giải gần đúng nghiệm, đánh giá sai số mắc phải và ngược lại đi tìm gần đúng nghiệm khi biết sai số.

+ Phương pháp lặp đơn giải gần đúng nghiệm, đánh giá sai số mắc phải và ngược lại đi tìm gần đúng nghiệm khi biết sai số.

+ Phương pháp Newton (tiếp tuyến) giải gần đúng nghiệm, đánh giá sai số mắc phải và ngược lại đi tìm gần đúng nghiệm khi biết sai số.

+ Phương pháp dây cung giải gần đúng nghiệm, đánh giá sai số mắc phải và ngược lại đi tìm gần đúng nghiệm khi biết sai số

NỘI DUNG VÀ CẤU TRÚC ĐỀ THI

KẾT THÚC MÔN HỌC

Hình thức thi: Tự luận

Thời gian: 60 phút

Câu 1 (3.5 điểm)

- Giải gần đúng phương trình
- Giải gần đúng hệ phương trình đại số tuyến tính
- Tự chọn một ví dụ giải số gần đúng một phương trình siêu việt hoặc đa thức bằng ít nhất hai phương pháp khác nhau và so sánh tốc độ hội tụ nghiệm.

Câu 2 (3 điểm)

- Tính gần đúng đạo hàm
- Tính gần đúng tích phân xác định
- Tự chọn ví dụ tính gần đúng tích phân theo 2 phương pháp và so sánh kết quả.

Câu 3 (3.5 điểm)

- Giải gần đúng phương trình vi phân
- Giải gần đúng phương trình đạo hàm riên

Đề thi thử TOÁN IV C **Đề 1**

Chú ý: Các phép tính lấy đến 6 chữ số thập phân.

Câu 1(3.0 điểm). Tìm nghiệm dương lớn nhất của phương trình sau bằng phương pháp dây Newton, với mức sai số đạt được là 10^{-5}

$$2x - \lg x = 10.$$

Câu 2 (3.0 điểm)

Tính gần đúng giá trị của $\frac{1}{4}ln5$ với sai số 10^{-3} bởi việc tính xấp xỉ

$$\int_0^5 \frac{dx}{4x+5}$$

theo phương pháp Simpson.

Câu 3 (4.0 điểm)

a. Dùng phương pháp Euler giải gần đúng bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2x + 2xy^3 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

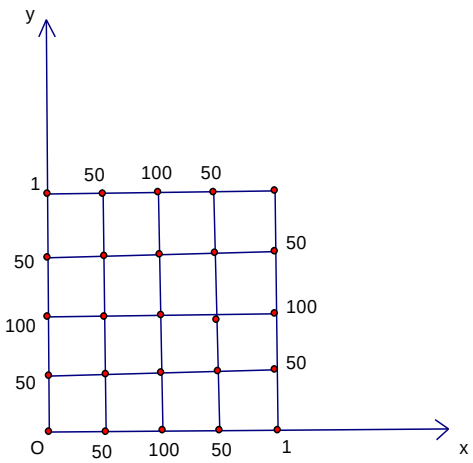
với $x \in [0,1]$ và $h = 0.2$

b. Sử dụng phương pháp lưới giải phương trình

$$3\Delta u = u + 6.\frac{\partial u}{\partial x} + 3xy^6,$$

$$(x,y) \in \Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1\}$$

với $h = l = \frac{1}{4}$ và giá trị u trên biên được cho bởi hình bên.



Đề thi thử TOÁN IV C **Đề 2**

Chú ý lấy đến 6 chữ số thập phân sau dấu phẩy

Câu 1 (3.0 điểm).. Dùng phương pháp Dây cung giải gần đúng phương trình sau đến mức sai số không vượt quá 10^{-3}

$$6x^3 + x - 1 = 0$$

Câu 2 (3.0 điểm).. Tính gần đúng tích phân sau bằng phương pháp hình thang đến mức sai số không vượt quá 10^{-1}.

$$I = \int_0^2 xe^x \cos x \, dx$$

Câu 3 (4.0 điểm).

a) Dùng phương pháp Euler giải gần đúng bài toán sau

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

với $x \in [0, 2]$; $n = 6$

b) Dùng phương pháp lưới giải gần đúng bài toán sau

$$\begin{cases} \Delta u = 2u + 1 \text{ với } (x, y) \in \Omega \\ u_\Gamma = 2x - y \end{cases}$$

Trong đó $\Omega = [2,3] \times [1,2]$ và $h = l = \frac{1}{4}$

BÀI TẬP PHƯƠNG PHÁP SỐ

Chương 1: Sai số và xấp xỉ

1.1. Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số xấp xỉ sau đây cho biết sai số tương đối của chúng

$$a = 13267\ ,\quad \delta_a = 0.1\%$$
$$b = 2.32\ ,\quad \delta_b = 0.7\%$$
$$c =$$

1.2. Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của thể tích hình cầu

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3$$

Với $d = 3.7 \pm 0.05cm$ và $\pi = 3.14 \pm 0.0016$

1.3. Hãy xác định số các chữ số chắc trong các số a, b với sai số tuyệt đối như sau

$$a = 0.3941\ ,\quad \Delta a = 0.25 \times 10^{-2}$$
$$b = 38.2543\ ,\quad \Delta b = 0.27 \times 10^{-2}$$

1.4. Hãy xác định số các chữ số chắc trong các số a, b với sai số tương đối như sau

$$a = 1.8921\ ,\ \delta_a = 0.1 \times 10^{-2}$$
$$b = 22.351\ ,\ \delta_b = 0.1$$

1.5. Hãy qui tròn các số dưới đây với 3 chữ số chắc và xác định sai số tuyệt đối và sai số tương đối của chúng

a. 2.1514
b. 0.16152
c. 0.01204
d. -0.0015281
e. 879.023467

1.6. Tính tổng S sau đây với ba chữ số lẻ thập phân là chữ số chắc

$$S = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{17}$$

1.7. Tính số e $\qquad e = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

Với sai số tuyệt đối không quá 10^{-4}

1.8. Hãy xác định giá trị của hàm số dưới đây cùng với sai số tuyệt đối và sai số tương đối ứng với những giá trị của biến đã cho với mọi chữ số đều là chữ số chắc:

a. $u = \ln(x + y^2)\,;\quad x = 0{,}97; y = 1{,}132$

b. $u = \frac{(x+y^2)}{z};\ x = 3{,}28; y = 0{,}932; z = 1{,}132$

Chương 2: Tính gần đúng nghiệm của một phương trình

2.1. Dùng phương pháp chia đôi, tìm giá trị gần đúng của nghiệm nhỏ nhất của phương trình sau chính xác đến 10^{-3}

a. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$
b. $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$

2.2. Giải gần đúng phương trình sau nhờ phương pháp lặp đơn chính xác đến 10^{-1}

a. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ biết $x^* \in (-3, -2.5)$
b. $x = \cos x$

2.3. Dùng phương pháp lặp đơn tính gần đúng nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^3 - x - 1000 = 0$ với sai số tuyệt đối không quá 10^{-5}.

2.4. Giải gần đúng các phương trình sau nhờ phương pháp dây cung

a. $x^3 + 3x + 5 = 0 \ , x \in [-1.2, -1.1]$

b. $x^4 - 3x - 4 = 0 \, , x \in [1, 2]$

2.5. Giải gần đúng nghiệm nhỏ nhất của phương trình sau nhờ phương pháp Newton

$$2^x = 4x$$

a. Đến sai số 10^{-2}

b. Đến lần lặp thứ 6.

c. Đên nghiệm gần đúng mà có 3 số thập phân sau dấu phẩy.

2.6. Dùng phương pháp Newton tính gần đúng nghiệm của các phương trình sau với sai số tuyệt đối không quá 10^{-5}

a. $x^2 - \sin \pi x = 0$

b. $x^2 - \cos \pi x = 0$

<u>Chương 3:</u> Tính gần đúng nghiệm của một hệ phương trình đại số tuyến tính

3.1. Giải hệ sau bằng phương pháp lặp đơn, tính lặp 3 lần và cho biết sai số

$$\begin{cases} 1.02x_1 - 0.05x_2 - 0.10x_3 = 0.795 \\ -0.11x_1 + 1.03x_2 - 0.05x_3 = 0.849 \\ -0.11x_1 - 0.12x_2 + 1.04x_3 = 1.398 \end{cases}$$

3.2. Giải hệ phương trình $Ax = b$ dưới đây nhờ phương pháp lặp đơn

$$A = \begin{bmatrix} 24.21 & 2.42 & 3.85 \\ 2.31 & 31.49 & 1.52 \\ 3.49 & 4.85 & 28.72 \end{bmatrix} \ , b = \begin{bmatrix} 30.24 \\ 40.95 \\ 42.81 \end{bmatrix}$$

Với độ chính xác 10^{-3}

3.3. Giải hệ phương trình ở bài 3.2 bằng phương pháp Seidel và đánh giá sai số gặp phải khi đó.

3.4. Cho

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận A^{-1} bằng phương pháp lặp , tính lặp hai lần, với

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.08 & 0.27 \\ 0.08 & 0.25 & -0.08 \\ -0.27 & -0.08 & 0.36 \end{bmatrix}$$

<u>Chương 4:</u> Tính gần đúng đạo hàm và tích phân xác định

4.1. Cho hàm số $y = \log x$ với giá trị tại $x = 50, 55, 60, 65$ lần lượt là $1.6990 \, , 1.7404 \, , 1.7782 \, , 1.8129$. Hãy tính đạo hàm của y tại $x = 50$ và so sánh với kết quả tính trực tiếp.

4.2. Xét hàm số cho bởi bảng sau

x_i	1	1.5	2	2.5
$f(x_i)$	0.00000	0.40511	0.69210	0.91672

Tính gần đúng $f'(1), f'(2), f''(1.5)$

4.3. Cho tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Hãy chia đoạn $[0,1]$ thành $n = 10$ đoạn con bằng nhau rồi tính gần đúng I và cho đánh giá sai số bằng
a. Công thức hình thang b. Công thức Simpson

4.4. Xét

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

Tính gần đúng tích phân I nhờ phương pháp hình thang chính xác đến 10^{-2}

4.5. Xét

$$I = \int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx$$

Tính gần đúng tích phân I nhờ phương pháp parabol chính xác đến 0.02

4.6. Tính gần đúng giá trị của $\frac{1}{5} ln6$ với sai số 3.10^{-3} bởi việc tính xấp xỉ

$$\int_0^6 \frac{dx}{5x+6}$$

a. Theo phương pháp Simpson ;
b. Theo phương pháp hình thang;

4.7. Sử dụng 1) Công thức hình thang, 2) Công thức Simpson để tính xấp xỉ các tích phân xác định sau và so sách các phương pháp.

a) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^3}\, dx,\ n = 8$
b) $\int_0^1 \cos(x^2)\, dx,\ n = 4$
c) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx,\ n = 6$
d) $\int_0^{\pi/4} x \tan x\, dx,\ n = 6$

<u>Chương 5:</u> Giải gần đúng phương trình vi phân thường và phương trình đạo hàm riêng

5.1. Dùng phương pháp Euler giải bài toán

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \ , 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Với bước đi $h = 0.2$

5.2. Giải gần đúng bài toán sau nhờ phương pháp Euler

$$\begin{cases} y' = \sin x + \cos y \\ y(2.5) = 0 \end{cases} \text{ với } 2.5 \le x \le 4\,, h = 0.3$$

5.3. Giải gần đúng bài toán sau nhờ phương pháp Euler cải tiến

$$\begin{cases} y' = \sin x + \sin y \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ với } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, h = \frac{\pi}{20}$$

5.4. Dùng phương pháp sai phân (phương pháp lưới) giải gần đúng bài toán sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y^2 x$$

$$G = \{(x,t) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

$$u(x,y)|_\Gamma = 2y + x$$

Với lưới vuông $h = l$

5.5. Sử dụng phương pháp lưới giải phương trình sau

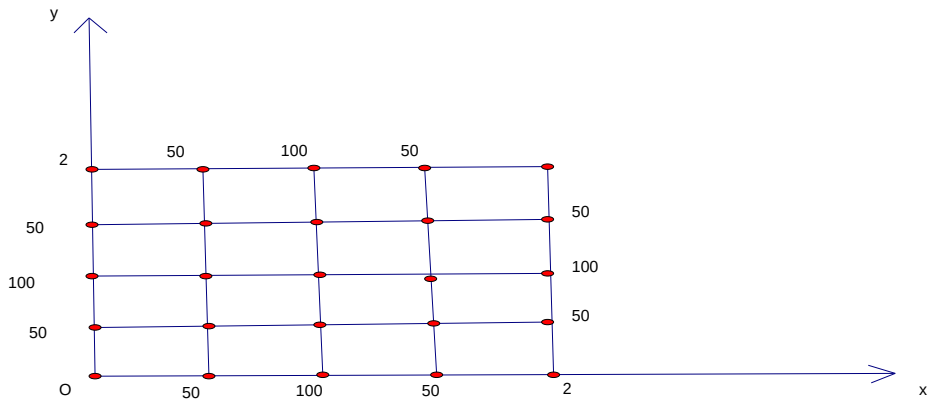
$$\Delta u = -1, (x,y) \in \Omega, \Omega \text{ là hình vuông cạnh 1}$$

Với $u|_\Gamma = 0$ (Γ là biên của Ω), chọn bước đi $h = \frac{1}{4}$.

5.6. Sử dụng phương pháp lưới giải phương trình

$$\Delta u = 25, (x,y) \in \Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$$

với $h = l = \frac{1}{2}$ và giá trị u trên biên được cho bởi hình bên.



5.7. Sử dụng phương pháp lưới giải gần đúng bài toán sau với $l = k = 0{,}5$

$$\begin{cases} \Delta u = 2 \quad với \quad (x,y) \in \Omega \\ u_{|\Gamma} = x^4 y^4 \end{cases}$$

Với $\Omega = \{(x,y) \in Oxy \mid x^2 + y^2 \le 1\}$